

MÉCANIQUE DU SOLIDE

JULIEN QUÉVA

TABLE DES MATIÈRES

Syllabus	2
1. Introduction	2
2. Vadémécum de calcul torsoriel	3
<i>a.</i> Rappels sur les produits scalaires et vectoriels	3
<i>b.</i> Division vectorielle	5
<i>c.</i> Propriétés des champs antisymétriques	7
<i>d.</i> Propriétés des torseurs	9
<i>e.</i> Éléments de réduction d'un système de vecteurs liés	13
Exercices	14
3. Cinématique	16
<i>a.</i> Étude des mouvements d'un solide	16
<i>b.</i> Rappels sur les changements de référentiels	19
<i>c.</i> Étude sommaire du mouvement de deux solides en contact ponctuel	22
Exercices	24
4. Géométrie des masses	27
<i>a.</i> Le barycentre et ses propriétés	27
<i>b.</i> L'opérateur d'inertie et ses propriétés	28
<i>c.</i> Moment d'inertie vis-à-vis d'une droite	29
<i>d.</i> Simplifications dues aux symétries de la distribution ρ	32
<i>e.</i> Un exemple complet : le cône plein homogène	35
Exercices	36
5. Cinétique	37
<i>a.</i> Définition des quantités cinétiques	37
<i>b.</i> Référentiel barycentrique et théorèmes de König	38
<i>c.</i> Moment cinétique et moments d'inertie	40
Exercices	41
6. Dynamique	42
<i>a.</i> Définition du torseur dynamique	43
<i>b.</i> Interactions du solide	44
<i>c.</i> Les principes de la mécanique classique appliqués au solide	45
<i>d.</i> Un exemple complet : glissement ou basculement d'un pavé	46
<i>e.</i> Un exemple complet : analyse détaillée de la machine d'Atwood	48
Exercices	50
7. Travail et énergie	52
<i>a.</i> Puissance et travail	52
<i>b.</i> Théorème de l'énergie cinétique	53
<i>c.</i> Théorème de l'énergie mécanique	54

Date: 2024–2025.

Exercices	55
Solutions des exercices	57
Algorithme de résolution d'un problème de mécanique	58
Index	58

SYLLABUS

Objectifs : Récapituler les principes de la mécanique et les appliquer aux cas des systèmes étendus rigides, continus ou discrets. Préparer aux applications industrielles de la mécanique, d'une part, et, d'autre part, être à même de résoudre des sujets du CAPES, voire de l'agrégation, portant sur la mécanique. Aménager la jonction avec la mécanique des milieux déformables du second semestre.

Références recommandées disponibles à la BU :

- Mécanique des solides et des systèmes de solides, M. Combarrous, D. Desjardins, C. Bacon, Dunod 2020, **531 COM**
- Mécanique Générale, S. Pommier, Y. Berthaud, Dunod 2010, **531 POM**
- Mini Manuel de Mécanique des solides, Y. Berthaud, C. Baron, F. Bouchelaghem, J-L. Carrou, B. Daunay, E. Sultan, Dunod 2021, **531 MIN**
- Mécanique générale, M. Ouisse, S. Mallet, Lavoisier 2010, **531.1 OUI**

Où en **gras** sont indiquées les références à la bibliothèque. Il est *plus que conseillé* de compléter ce cours avec *au moins* l'un de ces ouvrages.

Note finale = Max[Examen, (2×Examen + CC1 + CC2)/4], les TPs forment une note séparée.

Durée : 24h CM, 24h TD, 12h TP.

Remarque 1. La dernière version de ces notes est disponible à l'adresse : <http://julien.queva.perso.math.cnrs.fr/>

Remarque 2. Ces notes ne suivent pas le cheminement du cours en présentiel ! Elles sont rédigées avec un souci d'économie logique et de complétude. Ainsi certaines propriétés sont établies bien avant qu'elles ne soient utilisées et (surtout) motivées physiquement.

1. INTRODUCTION

On va se consacrer à l'étude mécanique de systèmes étendus dans l'espace mais qui présentent une structure additionnelle simplifiante à savoir qu'ils sont rigides.

Définition 1. Un système est qualifié de **solide rigide**, ou plus simplement de **solide**, si l'ensemble des points qui le constituent restent à même distance au cours du temps :

$$\forall A(t), B(t) \in \text{solide} : \|\overrightarrow{A(t)B(t)}\| = C^{te}.$$

On capture ainsi la notion de rigidité vu que cela interdit la compression du système où la distance entre différents points se réduirait et la détente du système où, dans ce cas, la distance s'accroîtrait. Ici les points se meuvent dans l'espace, a priori, mais restent à distance fixe les uns des autres. Notons qu'on ne différencie pas si ces points forment un ensemble discret ou continu.

Remarque 3. Cette définition inclut dans "le solide" tous les points qui constituent "naturellement" celui-ci mais aussi tous ceux qui, en raison de contraintes mécaniques par exemple, restent à distance fixe de *toutes ses points*. Donc, on gardera à l'esprit que le système *solide* possède peut-être plus de points que ceux évidents.

A présent on peut s'interroger sur la manière la plus *efficace* de décrire les objets de la mécanique du solide. Pour ce qui est de la mécanique du point un tel formalisme est celui des vecteurs (ceux "avec des flèches") qu'on emploie pour repérer le point dans un référentiel spécifié et écrire les principes de la mécanique. Pour un solide on pourrait considérer l'ensemble de tous les points le constituant mais, vu l'hypothèse de rigidité, on se doute que cela est superflu. Aussi la question suivante apparaît légitimement.

Question. Comment repérer un solide (libre) dans l'espace ? Par combien de paramètres ? Avec quel formalisme adapté à cette mécanique ?

Proposition 1. Six paramètres, ou **degrés de liberté**, repèrent un solide libre dans l'espace.

Démonstration. (Heuristique.) Un unique point A permet de repérer grossièrement le solide en cela qu'il interdit les translations, mais cela reste insuffisant. Deux points distincts A et B sont aussi insuffisants car on peut encore faire tourner le solide autour de l'axe passant par ces points sans les affecter. Trois points distincts et non alignés A , B et C suffisent à repérer le solide car il n'y a plus de transformations (isométriques) affectant le solide tout en fixant ces trois points. Pour repérer ces points on emploie trois coordonnées soit $3 \times 3 = 9$ paramètres. Or l'hypothèse de rigidité fixe les longueurs $\|\vec{AB}\|$, $\|\vec{AC}\|$ et $\|\vec{BC}\|$ soient trois contraintes à retrancher donc $9 - 3 = 6$ paramètres. \square

Le choix du repérage est contingent au problème considéré. On verra par exemple celui des *angles d'Euler* ultérieurement. Quant au formalisme adapté il s'agit de celui des torseurs développé dans la section suivante dont l'emploi dans les sections subséquentes constituera la preuve.

2. VADÉMÉCUM DE CALCUL TORSORIEL

L'outil mathématique pertinent et compact en mécanique des solides est celui des *torseurs*. Nous allons construire ceux-ci brièvement, mais densément, au fur et à mesure. C'est dans les sections suivantes que l'intérêt de ce langage se révélera, avec des démonstrations particulièrement compactes par exemple.

a. Rappels sur les produits scalaires et vectoriels

Avant que d'aborder les torseurs il est opportun de rappeler quelques propriétés des produits, scalaire et vectoriel, sur les vecteurs. En particulier les formules qui n'ont, peut être, pas été exploitées précédemment mais que l'on utilisera fréquemment dans ce cours.

Le produit scalaire est bilinéaire, symétrique et est la mesure de comment un vecteur se projette orthogonalement sur un autre :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

où la norme d'un vecteur se calcule comme :

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a},$$

et où θ est l'angle que font les deux vecteurs entre eux avec alors $\|\vec{a}\| \cos \theta$ la projection de \vec{a} sur \vec{b} ou, réciproquement, $\|\vec{b}\| \cos \theta$ la projection de \vec{b} sur \vec{a} , cf. Fig. 1. En particulier deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Les vecteurs de norme unité, ou simplement *normés*, sont notés \vec{e} comme, par exemple, $\|\vec{e}_x\| = 1$.

Le produit vectoriel quant à lui est une spécificité de l'espace à trois dimensions *orienté*, e.g. suivant la règle de la main droite cf. Fig. 2. Il s'agit d'un produit bilinéaire, antisymétrique dont le résultat est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs dont il est le produit et tel que :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= -\vec{b} \wedge \vec{a}, & \vec{a} \wedge \vec{b} &\perp \vec{a}, \quad \vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{b}, \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}) &\text{ est direct, } & \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta, \end{aligned}$$

où $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ est l'aire du parallélogramme de côtés \vec{a} et \vec{b} . En particulier deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$. On se souviendra que ce produit n'est pas associatif, l'ordre des parenthèses

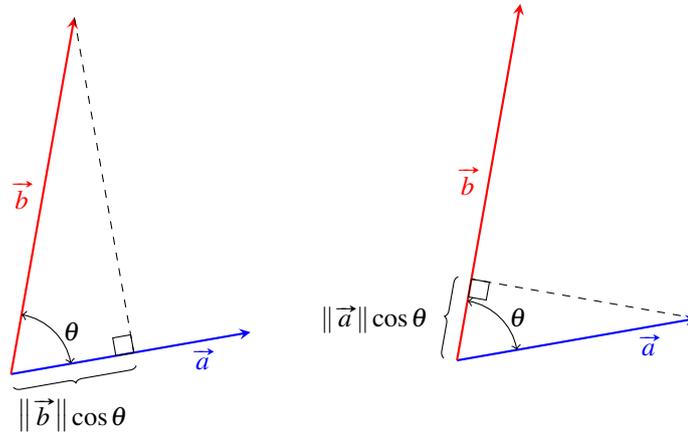


FIGURE 1. Le produit scalaire comme mesure de la projection orthogonale entre deux vecteurs.

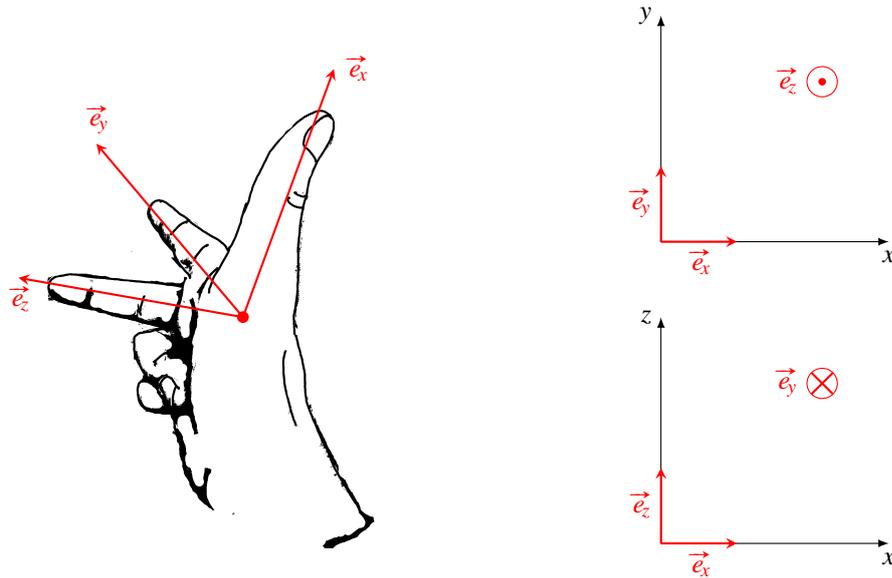


FIGURE 2. Rappel de la convention d'orientation de l'espace par la main droite où \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z (dans cet ordre !) forment une base orthonormée directe. Ci-contre convention d'orientation de l'espace vu en coupe où \odot est un vecteur qui pointe vers nous (le lecteur) alors que \otimes est un vecteur qui pointe dans la profondeur des pages.

est important : le vecteur $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et le vecteur $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ ne sont pas les mêmes, ce qu'on peut vérifier explicitement en employant **formule du double produit vectoriel** :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Les deux produits sont compatibles entre eux avec en particulier la **formule du produit mixte** :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}),$$

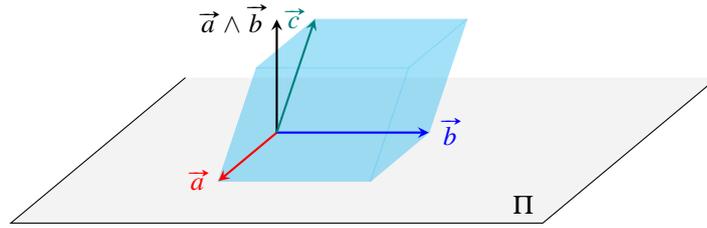


FIGURE 3. Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal au plan Π engendré par \vec{a} et \vec{b} . Sa norme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$, quant à elle, correspond à l'aire du parallélogramme de côté \vec{a} et \vec{b} . Le résultat du produit mixte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ s'identifie au volume du parallélépipède de côté \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} .

qui est invariante par permutation circulaire et dont le résultat s'identifie avec le volume du parallélépipède dont les côtés sont \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} , cf. Fig. 3. Dans l'exercice 1 on obtient d'autres identités utiles se démontrant à partir des formules du double produit vectoriel et du produit mixte.

b. Division vectorielle

Avant que d'aborder la notion de torseurs on va établir la solution générale d'une équation vectorielle que l'on rencontrera de multiples fois.

Propriété 1. Pour \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs (nécessairement) orthogonaux et \vec{A} non-nul l'équation :

$$\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$$

a pour solution générale la droite vectorielle :

$$\vec{X} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} + \lambda \vec{A}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 4. Notons qu'en prenant le produit scalaire de l'équation par \vec{A} on a :

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{X}) = 0 = \vec{A} \cdot \vec{B},$$

il est donc nécessaire que \vec{A} et \vec{B} soient orthogonaux.

Démonstration. Constatons dans un premier temps que

$$\vec{X} = -\frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A}\|^2} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}$$

est une solution particulière orthogonale à \vec{A} . Notons à présent que si \vec{X} et \vec{X}' sont deux solutions alors $\vec{A} \wedge (\vec{X}' - \vec{X}) = \vec{B} - \vec{B} = \vec{0}$, c'est-à-dire que $\vec{X}' - \vec{X} \propto \vec{A}$ et, donc, que si \vec{X} est une solution (particulière) alors $\vec{X} + \lambda \vec{A}$ est la solution générale. □

Remarque 5. On peut faire apparaître la solution particulière en considérant le produit vectoriel de l'équation $\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$ par \vec{A} et employant alors la formule du double produit vectoriel.

Définition 2. La résolution de l'équation $\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$ est appelée **division vectorielle** de \vec{B} par \vec{A} .

Le résultat de la division vectorielle est donc une droite vectorielle, avec plus d'équations on peut obtenir une solution unique \vec{X} .

Propriété 2. Pour \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs orthogonaux et non-nuls, pour \vec{C} et \vec{D} deux vecteurs orthogonaux avec \vec{C} non-nul, le système d'équation :

$$\begin{cases} \vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}, & \vec{B} \neq \vec{0}, \\ \vec{C} \wedge \vec{X} = \vec{D}, \end{cases}$$

sous la condition nécessaire de compatibilité :

$$\vec{A} \cdot \vec{D} = -\vec{C} \cdot \vec{B},$$

a une solution unique dans les cas suivants :

$$- \vec{D} = \vec{0}, \vec{B} \cdot \vec{C} = 0 \text{ et } \vec{A} \wedge \vec{C} \neq \vec{0} :$$

$$\vec{X} = -\frac{\|\vec{B}\|^2}{\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})} \vec{C},$$

$$- \vec{D} \neq \vec{0}, \vec{B} \wedge \vec{D} = \vec{0} \text{ et } \vec{A} \wedge \vec{C} \neq \vec{0} :$$

$$\vec{X} = \frac{1}{\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})} \left((\vec{D} \cdot \vec{B}) \vec{A} - \|\vec{B}\|^2 \vec{C} \right),$$

$$- \vec{D} \neq \vec{0}, \vec{B} \wedge \vec{D} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{A} \cdot \vec{D} \neq 0 :$$

$$\vec{X} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{D}}{(\vec{A} \cdot \vec{D})} = -\frac{\vec{B} \wedge \vec{D}}{(\vec{B} \cdot \vec{C})}.$$

Remarque 6. La condition nécessaire s'obtient en supposant les deux équations tenues et, par exemple, en prenant le produit scalaire de la seconde avec \vec{A} , on a :

$$\vec{A} \cdot \vec{D} = \vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{X}) = -\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{X}) = -\vec{C} \cdot \vec{B},$$

en employant les propriétés du produit mixte et du produit vectoriel. Examinons de plus les cas exclus suivants.

— Pour $\vec{B} = \vec{D} = \vec{0}$ la condition nécessaire est trivialement tenue. Alors, le système a pour solution $\vec{X} = \lambda \vec{A} = \mu \vec{C}$ qui n'existe que si, et seulement si, $\vec{C} \propto \vec{A}$ mais dans ce cas ne fixe pas une unique solution. Aussi faut-il qu'au moins l'un des deux seconds membres soit non-nul, ici $\vec{B} \neq \vec{0}$.

— Pour $\vec{B} \neq \vec{0}$ et $\vec{D} = \vec{0}$ la condition nécessaire impose à \vec{B} et \vec{C} d'être orthogonaux. Ceci autorise en particulier $\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\vec{C} = \gamma \vec{A}$, avec $\gamma \neq 0$, et donc que :

$$\vec{D} = \vec{0} = \vec{C} \wedge \vec{X} = \gamma \vec{A} \wedge \vec{X} = \gamma \vec{B} \neq \vec{0},$$

ce qui est absurde et on doit alors nécessairement avoir $\vec{A} \wedge \vec{C} \neq \vec{0}$.

— $\vec{B} \neq \vec{0}, \vec{D} \neq \vec{0}$ avec $\vec{B} \wedge \vec{D} \neq \vec{0}$ et $\vec{A} \cdot \vec{D} = 0$, donc $\vec{B} \cdot \vec{C} = 0$ en raison de la condition nécessaire de compatibilité. Notons déjà que nous avons simultanément : $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\vec{X} \perp \vec{B}$, $\vec{C} \perp \vec{D}$ et $\vec{X} \perp \vec{D}$ auxquels on demande en plus à ce que $\vec{A} \perp \vec{D}$ et $\vec{C} \perp \vec{B}$, ce qui fait beaucoup de relations d'orthogonalité à satisfaire, pour peu de vecteurs. Or, comme $\vec{B} \wedge \vec{D} \neq \vec{0}$, on doit avoir $\vec{A} = \alpha \vec{B} \wedge \vec{D}$, en injectant cela dans la première équation et en tirant partie des propriétés du produit vectoriel on a alors :

$$\vec{0} \neq \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{X} = -\alpha \vec{X} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{D}) = -\alpha [\vec{B}(\vec{X} \cdot \vec{D}) - \vec{D}(\vec{X} \cdot \vec{B})] = \vec{0},$$

ce qui est absurde et on doit alors nécessairement avoir $\vec{B} \wedge \vec{D} = \vec{0}$ ou $\vec{A} \cdot \vec{D} \neq 0$.

Démonstration. Premièrement considérons le cas où $\vec{D} = \vec{0}$. Pour $\vec{B} \neq \vec{0}$ et $\vec{D} = \vec{0}$, avec \vec{B} et \vec{C} orthogonaux en raison de la condition nécessaire, on a $\vec{X} = \mu \vec{C}$ ce qui en substituant dans la première équation donne :

$$\mu \vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{B} \neq \vec{0}$$

où l'inconnue est μ et où le fait que \vec{B} est simultanément perpendiculaire à \vec{A} et à \vec{C} est compatible avec le produit vectoriel (et le fait que $\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{0}$ est exclu). En effectuant le produit scalaire à gauche par \vec{B} , pour obtenir μ , on fait apparaître $\|\vec{B}\|^2$ et le produit mixte $\vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C}) = -\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$, qui est non-nul vu l'indépendance des vecteurs. On en tire μ qui permet d'obtenir la formule annoncée.

Deuxièmement considérons le cas où $\vec{D} \neq \vec{0}$, que l'on sépare en deux cas distincts.

— $\vec{B} \wedge \vec{D} = \vec{0}$, dans ce cas on a $\vec{D} = \delta \vec{B}$ avec $\delta = (\vec{D} \cdot \vec{B}) / \|\vec{B}\|^2$. Alors, en considérant la seconde équation à laquelle on retranche la première multipliée par δ , le système se ramène à $\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$ et $\vec{C}' \wedge \vec{X} = \vec{0}$ où $\vec{C}' = \vec{C} - \delta \vec{A}$. On est donc ramené au cas précédent où le fait que \vec{C}' soit orthogonal à \vec{B} est identique à ce que \vec{C} le soit vu que, par hypothèse, \vec{A} l'est déjà. Il en est de même pour ce qui est de l'indépendance linéaire. Alors, comme $\vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C}') = \vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C})$ on aboutit à la formule annoncée. Il s'agit d'une redite masquée du cas précédent.

— $\vec{B} \wedge \vec{D} \neq \vec{0}$ avec $\vec{A} \cdot \vec{D} \neq 0$, dans ce cas en notant que $\vec{X} \perp \vec{B}$ et $\vec{X} \perp \vec{D}$ il est nécessaire que $\vec{X} = \mu \vec{B} \wedge \vec{D}$. En injectant cette expression dans l'une ou l'autre des deux équations, avec la condition nécessaire, on obtient la valeur de μ et la formule annoncée. \square

c. Propriétés des champs antisymétriques

On rappelle d'abord les définitions et propriétés des applications (anti-)symétriques pour ensuite aborder les champs antisymétriques qui sont ceux apparaissant en mécanique du solide et qu'on compilera en un torseur.

Définition 3. Une application linéaire M est **symétrique** si

$$\forall \vec{u}, \vec{v} : \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{M}(\vec{u}),$$

ce qui signifie qu'en terme de matrice on a $M^T = M$.

Définition 4. Une application linéaire M est **antisymétrique** si

$$\forall \vec{u}, \vec{v} : \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{M}(\vec{u}),$$

ce qui signifie qu'en terme de matrice on a $M^T = -M$.

Remarque 7. Il est immédiat que si M est une application linéaire antisymétrique alors $\vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{u}) = 0$.

Propriété 3. Une application linéaire M vérifiant pour tout \vec{v} l'équation $\vec{v} \cdot \vec{M}(\vec{v}) = 0$ est antisymétrique.

Démonstration. On exploite la linéarité :

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{M}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{M}(\vec{u}) + \vec{v} \cdot \vec{M}(\vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{M}(\vec{u}) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Propriété 4. Toute application linéaire antisymétrique peut s'écrire comme :

$$\vec{M}(\vec{v}) = \vec{z} \wedge \vec{v},$$

Démonstration. On considère la forme générale de la matrice de M dans une base orthonormée directe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -z_z & z_y \\ z_z & 0 & -z_x \\ -z_y & z_x & 0 \end{pmatrix}$$

qui en s'appliquant sur un vecteur \vec{v} coïncide avec le produit vectoriel $\vec{z} \wedge \vec{v}$. \square

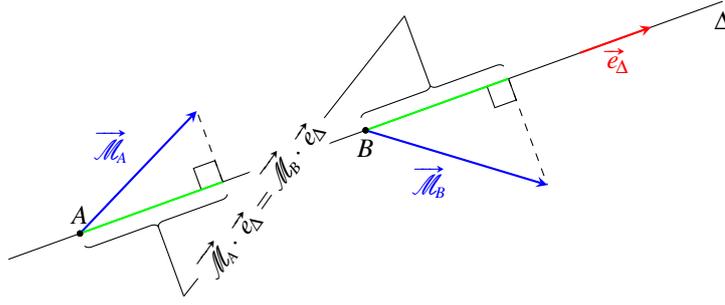


FIGURE 4. La projection d'un champ équijectif en tous points d'une droite est la même (ici en vert).

Définition 5. Un champ vectoriel $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}(A)$ est un **champ antisymétrique** s'il existe une **résultante** \vec{z} , ou **somme**, telle que $\vec{\mathcal{M}}_A$ vérifie l'**équation de transport** :

$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Pour des raisons qui seront évidentes par la suite, nous appellerons de manière équivalente, bien qu'abusive, un champ antisymétrique un **champ de moments**.

Remarque 8. On comprend que c'est $\vec{M}(\overrightarrow{AB}) = \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A$ qui est une application antisymétrique dans le champ antisymétrique. On a de plus conscience que pour s'autoriser à écrire cela ainsi on a fixé un repère de l'espace affine.

Remarque 9. La loi de transport d'un champ antisymétrique est connue sous d'autres appellations : *règle de transport des moments*, *formule de Varignon* ou *formule de BABAR* (comme $B = A + BA \wedge \vec{z}$).

De tels champs peuvent s'écrire comme :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{z} \wedge \vec{r},$$

et l'on peut voir qu'ils suivent des hélices ou des *torsades* le long d'une droite orientée par \vec{z} , cf. e.g. Fig. 5, ce qu'on peut vérifier en calculant les lignes de courant du champ $\vec{\mathcal{M}}$. On établira cela rigoureusement ultérieurement et en particulier les propriétés de cet axe autour duquel s'enroule le champ.

Propriété 5. Un champ antisymétrique est constant le long des droites orientées par sa résultante : $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B$ pour $\overrightarrow{AB} \propto \vec{z}$.

Démonstration. Pour $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{z}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\mathcal{M}}_A + \lambda \vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{\mathcal{M}}_A$. \square

Définition 6. Un champ vectoriel $\vec{\mathcal{M}}_A$ est **équijectif** s'il vérifie l'équation :

$$\forall A, B : \vec{\mathcal{M}}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{\mathcal{M}}_B \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Remarque 10. La notion d'équijectivité s'interprète aisément : la projection du champ $\vec{\mathcal{M}}_A$ en tous points d'une droite passant par A, mettons $\Delta = (A, \vec{e}_\Delta)$ est la même, cf. Fig. 4. En effet,

$$\vec{\mathcal{M}}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{\mathcal{M}}_B \cdot \overrightarrow{AB} \implies \vec{\mathcal{M}}_A \cdot (\lambda \vec{e}_\Delta) = \vec{\mathcal{M}}_B \cdot (\lambda \vec{e}_\Delta), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

pour tous les points B de Δ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{e}_\Delta$.

Les deux types de champs que l'on vient de définir sont liés de la manière suivante.

Théorème 1. Les champs antisymétriques sont équiprojectifs et, réciproquement, les champs équiprojectifs sont antisymétriques.

Démonstration. Il s'agit de démontrer la double implication. Supposons $\vec{\mathcal{M}}_A$ antisymétrique de résultante \vec{z} , alors

$$\vec{\mathcal{M}}_B \cdot \vec{AB} = (\vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{AB},$$

vu que $(\vec{z} \wedge \vec{AB}) \perp \vec{AB}$, d'après les propriétés du produit vectoriel. Ainsi le champ est équiprojectif.

Supposons à présent le champ équiprojectif. On pose $\vec{M}(\vec{AB}) = \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A$ où M est une application linéaire car

$$\vec{M}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{M}(\vec{AC}) = \vec{\mathcal{M}}_C - \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_C - \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{M}(\vec{BC}) + \vec{M}(\vec{AB}),$$

de plus avec l'équiprojectivité de $\vec{\mathcal{M}}_A$ on a :

$$\vec{AB} \cdot (\vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A) = \vec{AB} \cdot \vec{M}(\vec{AB}) = 0, \forall \vec{AB},$$

donc \vec{M} est une application linéaire antisymétrique et il existe \vec{z} tel que l'on puisse écrire cette application antisymétrique comme $\vec{M}(\vec{AB}) = \vec{z} \wedge \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A$. Ainsi le champ est antisymétrique. \square

Remarque 11. Pour rendre "plus rigoureux" cette démonstration il s'agirait de considérer des vecteurs arbitraires \vec{u} et \vec{v} puis de choisir des représentants tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

Notons la dissymétrie suivante. Alors que l'antisymétrie et l'équiprojectivité sont équivalentes, démontrer l'antisymétrie d'un champ est (dans la pratique) compliqué tandis qu'établir son équiprojectivité est quasi-trivial. Aussi c'est généralement la propriété d'équiprojectivité du champ qu'on vérifiera.

§Retrouver la résultante d'un champ antisymétrique. Si on connaît la résultante \vec{z} et la valeur du champ antisymétrique en un point on peut en déduire le champ en tous points grâce à la formule de transport. Si l'on connaît (seulement) la valeur du champ en trois points distincts et non-alignés A, B et C on peut trouver la résultante \vec{z} en résolvant le système :

$$\begin{cases} \vec{AB} \wedge \vec{z} = \vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_B, \\ \vec{AC} \wedge \vec{z} = \vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_C, \end{cases}$$

et où la condition de compatibilité nécessaire de la propriété 2 est automatiquement satisfaite grâce à l'équiprojectivité du champ :

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{?}{=} \vec{AB} \cdot (\vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_C) + \vec{AC} \cdot (\vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_B) \\ &= (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot (\vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_C) + (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_B) \\ &= \vec{BC} \cdot (-\vec{\mathcal{M}}_A + \vec{\mathcal{M}}_C + \vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_B) = \vec{BC} \cdot (\vec{\mathcal{M}}_C - \vec{\mathcal{M}}_B) = 0. \checkmark \end{aligned}$$

Alors, ayant résolu le système on a \vec{z} et trois valeurs du champ, ce qui permet de reconstituer le champ en tous points.

d. Propriétés des torseurs

Définition 7. Un **torseur** est un champ antisymétrique avec sa résultante, noté $\mathcal{T} = \{\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_A\}$, où \vec{z} et $\vec{\mathcal{M}}_A$ sont les **éléments de réduction** de \mathcal{T} (au point A). On note le **torseur nul** $0 = \{\vec{0}, \vec{0}\}$.

Remarque 12. Il y a d'autres notations pour les torseurs :

$$\mathcal{T} = \{\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_A\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{array} \right\},$$

où la dernière expression est celle en **coordonnées pluckériennes**.

Proposition 2. *L'espace des torseurs est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension six, on note :*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}' &= \lambda \mathcal{T} = \{\lambda \vec{v}, \lambda \vec{\mathcal{M}}_A\}, \lambda \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{T}'' &= \mathcal{T} + \mathcal{T}' = \{\vec{v} + \vec{v}', \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{\mathcal{M}}_A'\}.\end{aligned}$$

Démonstration. On vérifie la linéarité, c'est-à-dire l'homogénéité et l'additivité. Soit λ un réel non nul, posons $\vec{v}' = \lambda \vec{v}$ et $\vec{\mathcal{M}}_A' = \lambda \vec{\mathcal{M}}_A$, l'enjeu est de vérifier que $\vec{\mathcal{M}}_B'$ est encore un champ antisymétrique de résultante \vec{v}' , ce qui est le cas :

$$\vec{\mathcal{M}}_B' = \lambda \vec{\mathcal{M}}_B = \lambda(\vec{\mathcal{M}}_A + \vec{v} \wedge \vec{AB}) = (\lambda \vec{\mathcal{M}}_A) + (\lambda \vec{v}) \wedge \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_A' + \vec{v}' \wedge \vec{AB},$$

ainsi $\{\lambda \vec{v}, \lambda \vec{\mathcal{M}}_A\}$ est bien un torseur. Pour ce qui est de l'additivité posons $\vec{v}'' = \vec{v} + \vec{v}'$ et $\vec{\mathcal{M}}_A'' = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{\mathcal{M}}_A'$, il s'agit là encore de vérifier que $\vec{\mathcal{M}}_B''$ est un champ antisymétrique de résultante \vec{v}'' , ce qui est le cas :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_B'' &= \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{\mathcal{M}}_B' = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{v} \wedge \vec{AB} + \vec{\mathcal{M}}_A' + \vec{v}' \wedge \vec{AB} \\ &= (\vec{\mathcal{M}}_A + \vec{\mathcal{M}}_A') + (\vec{v} + \vec{v}') \wedge \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_A'' + \vec{v}'' \wedge \vec{AB}.\end{aligned}$$

Ces deux propriétés assurent la linéarité de l'espace des torseurs ce qui en fait un espace vectoriel (sur \mathbb{R}).

Pour ce qui est de la dimension on remarque que pour spécifier (univoquement) un torseur il suffit de connaître sa résultante \vec{v} (trois paramètres) et la valeur de son champ de moments en un point (trois autres paramètres) soient six paramètres correspondant à la dimensionnalité de l'espace des torseurs. \square

Remarque 13. Ces six paramètres de l'espace des torseurs sont, évidemment, à mettre en regard avec les six paramètres nécessaires au repérage d'un solide dans l'espace.

Définition 8. Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux torseurs, on définit le **produit scalaire entre deux torseurs**, ou le **comoment** de ces torseurs, par la formule :

$$\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}' = \{\vec{v}, \vec{\mathcal{M}}_A\} \cdot \{\vec{v}', \vec{\mathcal{M}}_A'\} = \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A' + \vec{v}' \cdot \vec{\mathcal{M}}_A.$$

Propriété 6. *Le produit scalaire entre torseurs est bilinéaire symétrique et indépendant du point A choisi dans la définition.*

Démonstration. La bilinéarité et la symétrie sont évidentes de la formule définitoire. La seule partie à vérifier est l'indépendance vis-à-vis du point A où sont évalués les champs de moment. Considérons l'expression en un point B :

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{M}}_B' + \vec{v}' \cdot \vec{\mathcal{M}}_B &= \vec{v} \cdot (\vec{\mathcal{M}}_A' + \vec{v}' \wedge \vec{AB}) + \vec{v}' \cdot (\vec{\mathcal{M}}_A + \vec{v} \wedge \vec{AB}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A' + \vec{v}' \cdot \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{v} \cdot (\vec{v}' \wedge \vec{AB}) + \vec{v}' \cdot (\vec{v} \wedge \vec{AB}) \\ &= \mathcal{T} \cdot \mathcal{T}' + \vec{AB} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{v}' + \vec{v}' \wedge \vec{v}) \\ &= \mathcal{T} \cdot \mathcal{T}',\end{aligned}$$

en employant la cyclicité du produit mixte et l'antisymétrie du produit vectoriel. \square

Remarque 14. Grâce à cette propriété d'indépendance du produit de deux torseurs on calculera celui-ci en évaluant les champs aux points où leur expression est la plus simple.

§Classification des torseurs. Grâce au produit scalaire et en particulier à sa propriété d'invariance on peut établir une classification des torseurs.

Définition 9. Soit \mathcal{T} un torseur, alors $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \cdot \mathcal{T} = 2\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A$ est l'**automoment** de \mathcal{T} , ou l'**invariant scalaire** de \mathcal{T} . L'automoment d'un torseur est un réel spécifique au torseur, fixé une fois pour toute.

On notera que cet invariant est la projection du champ sur les droites dirigées par \vec{z} .

Définition 10. Les torseurs d'automoment nul se séparent dans les deux cas suivants :

- les **couples** tels que $\mathcal{T} = \{\vec{z} = \vec{0}, \vec{\mathcal{M}}\}$, en incluant le torseur nul comme un couple particulier,
- les **glisseurs** tels que $\mathcal{T} = \{\vec{z} \neq \vec{0}, \vec{\mathcal{M}}_A\}$ avec $\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A = 0$.

Propriété 7. Le moment d'un couple est un champ constant.

Démonstration. Par application directe de la formule de transport : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{0} \wedge \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}$. \square

Propriété 8. Le moment d'un glisseur s'annule sur une droite orientée par \vec{z} appelée **axe du glisseur**.

Démonstration. Soit on a un point A tel que $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$, alors si l'on cherche l'ensemble des points B tels que l'on ait aussi $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$ on a : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \vec{AB} = \vec{z} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$, dont la solution est la droite passant par A orientée par \vec{z} .

Soit on a un point A tel que $\vec{\mathcal{M}}_A \neq \vec{0}$, alors si l'on cherche l'ensemble des points B tels que l'on ait $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$ on a : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$, c'est-à-dire que l'on cherche à résoudre l'équation $\vec{z} \wedge \vec{AB} = -\vec{\mathcal{M}}_A \neq \vec{0}$. Comme le torseur est un glisseur on a bien que $\vec{z} \cdot (-\vec{\mathcal{M}}_A) = 0$ et la solution, obtenue par division vectorielle (cf. Prop. 1), est la droite vectorielle orientée par $\vec{z} : \vec{AB} = (\vec{z} \wedge \vec{\mathcal{M}}_A) / \|\vec{z}\|^2 + \lambda \vec{z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Remarque 15. Les couples forment un sous-espace vectoriel de l'espace des torseurs, étant donné que la propriété $\vec{z} = \vec{0}$ est stable par linéarité (en considérant le torseur nul comme un couple particulier). Les glisseurs, en revanche, ne sont pas stables entre eux. Par exemple $\{\vec{z} = \vec{e}_x, \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{e}_z\} + \{\vec{z}' = -\vec{e}_x, \vec{\mathcal{M}}_O' = \vec{e}_y\}$, qui est la somme de deux glisseurs, forme un couple et non un glisseur. Ou simplement on peut voir que le torseur nul n'appartient aux glisseurs qui ne peuvent donc pas former un espace vectoriel.

Théorème 2 (de décomposition). Un torseur \mathcal{T} d'automoment non nul se décompose uniquement en la somme d'un couple et d'un glisseur :

$$\mathcal{T} = \{\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_A\} = \{\vec{0}, \vec{\mathcal{M}}_I\} + \{\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_{\perp A}\} = \mathcal{T}_{\text{couple}} + \mathcal{T}_{\text{glisseur}},$$

avec :

$$\vec{\mathcal{M}}_I = \frac{(\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A)}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} = \frac{1}{2} \mathcal{T}^2 \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|^2}, \quad \vec{\mathcal{M}}_{\perp A} = \vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_I.$$

Démonstration. La décomposition d'un champ peut s'effectuer en un point arbitraire A , ce qu'il s'agit de démontrer ici c'est que cette décomposition est compatible avec la loi de transport et vaut en tous points. Notons pour commencer que $\vec{\mathcal{M}}_I$ est constant car \mathcal{T}^2 l'est, ce qui correspond bien au moment d'un couple et ainsi $\{\vec{0}, \vec{\mathcal{M}}_I\}$ forme un couple. Pour ce qui est de la partie glisseur notons que :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\perp B} = \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_I = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \vec{AB} - \vec{\mathcal{M}}_I = (\vec{\mathcal{M}}_A - \vec{\mathcal{M}}_I) + \vec{z} \wedge \vec{AB} = \vec{\mathcal{M}}_{\perp A} + \vec{z} \wedge \vec{AB},$$

c'est-à-dire que $\{\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_{\perp A}\}$ forme un torseur avec $\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{\perp A} = 0$, donc c'est un glisseur. \square

Remarque 16. Cette décomposition vaut pour chaque torseur individuellement, il n'y a pas de décomposition de l'espace des torseurs en sous-espaces vectoriels supplémentaires correspondants aux couples et aux glisseurs. Ne serait-ce que parce que les glisseurs ne forment pas un espace-vectoriel.

§Axe central des torseurs quelconques. Aux torseurs quelconques on peut, comme aux glisseurs, associer une droite remarquable de l'espace.

Définition 11. Soit \mathcal{F} un torseur d'automoment non nul on nomme **axe central** de \mathcal{F} l'axe de son glisseur associé.

Propriété 9. Soit \mathcal{F} un torseur d'automoment non nul et Δ son axe central alors :

- sur l'axe central le moment est colinéaire à la résultante du torseur : $\vec{\mathcal{M}}_{M \in \Delta} \wedge \vec{z} = \vec{0}$,
- sur l'axe central la norme du moment est minimale : $\|\vec{\mathcal{M}}_{M \in \Delta}\| = \min_{P \in \mathbb{R}^3} \|\vec{\mathcal{M}}_P\|$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de décomposition et des propriétés de l'axe d'un glisseur. Pour la première propriété on a : $\vec{\mathcal{M}}_{M \in \Delta} = \vec{\mathcal{M}}_M + \vec{\mathcal{M}}_{LM \in \Delta} = \vec{\mathcal{M}}_M \propto \vec{z}$, vu que le moment du glisseur $\vec{\mathcal{M}}_{LM}$ s'annule sur l'axe du glisseur et que $\vec{\mathcal{M}}_M$ est constant et parallèle à la résultante. Pour la seconde propriété on a : $\|\vec{\mathcal{M}}_P\|^2 = \|\vec{\mathcal{M}}_M + \vec{\mathcal{M}}_{LP}\|^2 = \|\vec{\mathcal{M}}_M\|^2 + \|\vec{\mathcal{M}}_{LP}\|^2 \geq \|\vec{\mathcal{M}}_M\|^2$, en tenant compte du fait que $\vec{\mathcal{M}}_M$ et $\vec{\mathcal{M}}_{LP}$ sont orthogonaux entre eux, que $\vec{\mathcal{M}}_M$ est un champ constant, et que la norme du champ antisymétrique du glisseur s'annule sur l'axe du glisseur. \square

On se souviendra de plus du corollaire très utile suivant.

Corollaire. Si le champ antisymétrique s'annule en un point $\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{0}$, alors le torseur est un glisseur dont l'axe passe par le point P .

Démonstration. En effet, vu que $\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{0}$ on a $\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_P = 0$ ce qui fait du torseur un glisseur et aussi $\|\vec{\mathcal{M}}_P\| = 0$, qui est nécessairement le minimum de la norme, donc ce point appartient à l'axe central du glisseur. \square

Remarque 17. Étant donné la démonstration on pourrait affiner l'énoncé de la propriété vu que la constante de proportionnalité entre $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{z} sur l'axe central est $(\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A) / \|\vec{z}\|^2 = \mathcal{F}^2 / (2\|\vec{z}\|^2)$ et que le minimum de la norme, sur cet axe, est $\|\vec{\mathcal{M}}_M\| = |\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A| / \|\vec{z}\|$.

Remarque 18. Souvent l'axe central est défini par la première propriété : $\Delta = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{\mathcal{M}}_M = \lambda \vec{z}\}$, ce qui est bien équivalent car alors cela impose que $\vec{\mathcal{M}}_{LM} = \vec{0}$ c'est-à-dire la propriété de l'axe du glisseur associé. La résolution de l'équation $\vec{\mathcal{M}}_M = \lambda \vec{z}$ est la droite vectorielle, pour P quelconque, donnée par

$$\vec{PM} = \frac{\vec{z} \wedge \vec{\mathcal{M}}_P}{\|\vec{z}\|^2} + \mu \vec{z}, \mu \in \mathbb{R},$$

avec $\lambda = \vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_P / \|\vec{z}\|^2$ pour que $\vec{z} \cdot (\lambda \vec{z} - \vec{\mathcal{M}}_P) = 0$ tel que nécessaire pour effectuer la division vectorielle.

On peut de même employer la deuxième propriété comme définition. En effet comme $|\mathcal{F}^2| = 2\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_P = 2\|\vec{z}\| \|\vec{\mathcal{M}}_P\| |\cos \theta_P| = C^{te} \geq 0$ le minimum de $\|\vec{\mathcal{M}}_P\|$ est atteint lorsque la valeur absolue du cosinus est maximum c'est-à-dire pour $\cos \theta_P = \pm 1$, donc lorsque le moment et la résultante sont colinéaires.

Exemple 1. Soit $\mathcal{F} = \{\vec{z} = \vec{e}_x, \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{e}_x + \vec{e}_y\}$ un torseur avec $\mathcal{F}^2 = 2\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 2$ dont on va chercher l'axe central Δ de diverses manières.

- (1) En résolvant à la main l'équation $\vec{\mathcal{M}}_M = \lambda \vec{z}$. Notons qu'avec $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ on a :

$$\vec{\mathcal{M}}_M = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{z} \wedge \vec{OM} = \vec{e}_x + (1-z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z = \lambda \vec{z} = \lambda \vec{e}_x,$$

dont la solution est $\lambda = 1, z = 1$ et $y = 0$ avec x indéterminé paramétrant l'axe central : $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 1\}$.

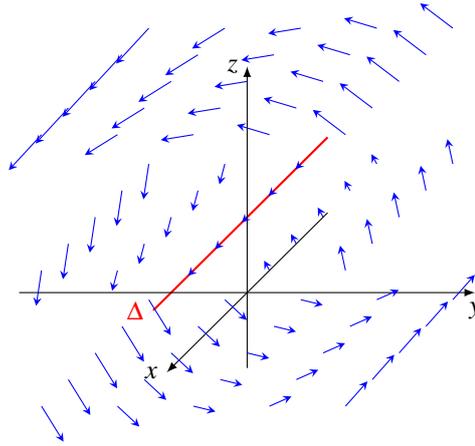


FIGURE 5. Représentation du champ de vecteur antisymétrique $\vec{\mathcal{M}}_M$ de l'exemple 1 où l'axe central Δ est représenté en rouge. Tous les vecteurs forment une *torsade* autour de cet axe.

- (2) Par application *brutale* de la formule solution, là on a simplement :

$$\vec{OM} = \frac{\vec{z} \wedge \vec{\mathcal{M}}_O}{\|\vec{z}\|^2} + \mu \vec{z} = \vec{e}_z + \mu \vec{e}_x,$$

soit $M \in \Delta$ de coordonnées $M(\mu, 0, 1)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

- (3) En minimisant $\|\vec{\mathcal{M}}_M\|$. En effet, on a immédiatement :

$$\|\vec{\mathcal{M}}_M\|^2 = 1 + (1-z)^2 + y^2,$$

qui est minimum pour

$$\vec{\text{grad}}_M(\|\vec{\mathcal{M}}_M\|^2) = 2y\vec{e}_y - 2(1-z)\vec{e}_z = \vec{0},$$

soit pour $y = 0$ et $z = 1$.

- (4) En décomposant le torseur en couple et glisseur puis en cherchant l'axe du glisseur. Comme on a $\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O / \|\vec{z}\|^2 = 1$ on en déduit que

$$\vec{\mathcal{M}}_l = \frac{(\vec{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O)}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} = \vec{z} = \vec{e}_z, \quad \vec{\mathcal{M}}_{\perp M} = \vec{\mathcal{M}}_M - \vec{\mathcal{M}}_l = (1-z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z,$$

où le champ antisymétrique du glisseur s'annule pour $z = 1$ et $y = 0$.

Le champ vectoriel antisymétrique $\vec{\mathcal{M}}_M$ et son axe central Δ sont représentés en Fig. 5.

e. Éléments de réduction d'un système de vecteurs liés

Nous avons établi les propriétés importantes des torseurs mais, sauf dans les cas où il nous est donné, nous n'avons pas construit de tels torseurs. Les principaux torseurs que l'on rencontrera en mécanique du solide (\mathcal{C} , \mathcal{D} et \mathcal{F}), à l'exception du torseur cinématique \mathcal{V} , sont construits de la manière suivante.

Définition 12. Un **vecteur lié** est la donnée d'un **point d'application** M et d'un vecteur \vec{V} s'y appliquant : (M, \vec{V}) . À un **système de vecteurs liés** $\mathcal{S} = \{(M_i, \vec{V}_i)\}_{i=1,2,\dots} = \{(M, \vec{V}(M))\}_{M \in \mathcal{V}}$ on associe ses **éléments de réduction** que sont :

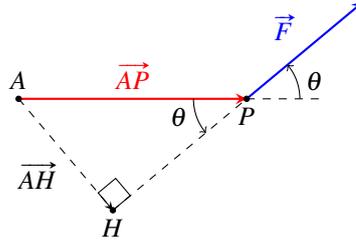


FIGURE 6. Cas simple d'une force s'appliquant en un point P faisant apparaître le *bras de levier* $\|\overrightarrow{AH}\|$, tel que dans l'exemple 2.

- sa **somme** ou **résultante** : $\vec{z} = \sum_i \vec{V}_i = \iiint_{M \in V} \vec{V}(M) dV$;
- son **moment au point A** : $\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{V}_i = \iiint_{M \in V} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M) dV$.

Exemple 2. Nous connaissons déjà de tels cas en mécanique avec, par exemple, la somme des forces et le moment des forces s'appliquant sur un système. Considérons l'exemple simple d'une (seule) force \vec{F} s'appliquant au point P , formant le vecteur lié (P, \vec{F}) , cf. Fig. 6. Notons que le moment de la force \vec{F} appliquée en P vis-à-vis du point A est donné par :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F},$$

c'est-à-dire qu'en norme, et en employant les propriétés du produit vectoriel, on a :

$$\|\vec{\mathcal{M}}_A\| = \|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}\| = \|\overrightarrow{AP}\| \|\vec{F}\| \sin \theta = \|\overrightarrow{AH}\| \|\vec{F}\|,$$

où θ est l'angle que font \overrightarrow{AP} et \vec{F} et où H est la projection orthogonale de A sur la droite passant par P et dirigée par \vec{F} , cf. Fig. 6. Dans ce cas on appelle la distance $\|\overrightarrow{AH}\|$ le **bras de levier**. Ainsi, pour accroître le moment de la force il s'agit d'augmenter ce bras de levier en : augmentant la distance au point d'application et en étant aussi perpendiculaire que possible à la force qui y est appliquée. C'est le principe d'une clé à molette, par exemple, où l'on souhaite que le moment en A soit maximum en tirant avec une force \vec{F} en P .

Remarque 19. Vu que $\vec{\mathcal{M}}_A$ est défini au point A mais, de fait, en tous points le moment est un *champ vectoriel*.

Propriété 10. Les éléments de réduction d'un système de vecteurs liés \mathcal{S} forment un *torseur* :

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{\vec{z}, \vec{\mathcal{M}}_A\}.$$

Démonstration. C'est un calcul direct, on vérifie que $\vec{\mathcal{M}}_A$ est un champ antisymétrique de résultante \vec{z} :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_B &= \sum_i \overrightarrow{BM}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_i (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}_i) \wedge \vec{V}_i = \overrightarrow{BA} \wedge (\sum_i \vec{V}_i) + \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{V}_i \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{z} + \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{z} \wedge \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \quad \square$$

Exercices

1. En employant les identités remarquables du calcul vectoriel établir celles suivantes :

- (1) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$,
- (2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2$,

$$(3) (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{d})] \vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})] \vec{d},$$

$$(4) \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}, \text{ (Identité de Jacobi).}$$

2. Soit (A, \vec{a}) un vecteur lié avec A le point de coordonnées $(0, 5, 2)$ et le vecteur $\vec{a} = 2\vec{e}_y - \vec{e}_x$, dans le ROND cartésien usuel $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\})$. Donner l'expression de $\vec{\mathcal{M}}_O$ puis de $\vec{\mathcal{M}}_M$, en déduire l'axe du champ antisymétrique.

3. Soit le système de vecteurs liés :

$$\mathcal{S} = \{(M_1(1, 0, 0), \vec{V}_1 = \vec{e}_z), (M_2(0, 1, 0), \vec{V}_2 = 2\vec{e}_y - \vec{e}_x), (M_3(0, 0, 1), \vec{V}_3 = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z)\}.$$

Déterminer α, β et γ tels que le torseur \mathcal{F} , dont les éléments de réduction sont ceux de \mathcal{S} , soit un couple. Dans ce cas calculer le moment de \mathcal{F} .

4. Soit un tétraèdre non-plan $OABC$ et le système de vecteurs liés

$$\mathcal{S} = \{(O, \omega\vec{OA}), (A, \alpha\vec{AB}), (B, \beta\vec{BC}), (C, \gamma\vec{CO})\}.$$

(1) Déterminer les conditions pour que $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ soit un glisseur.

(2) Déterminer les conditions pour que $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ soit un couple. Déterminer alors son moment.

5. Déterminer l'ensemble des points de l'espace tels que les moments résultants des torseurs \mathcal{F} et \mathcal{F}' soient égaux.

6. Démontrer que :

(1) si un torseur \mathcal{F} a un moment nul en trois points distincts et non alignés, alors \mathcal{F} est le torseur nul ;

(2) si deux torseurs \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont même moment en trois points distincts et non alignés, alors \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont égaux.

7. Dans le ROND cartésien usuel on considère le point M de coordonnées cartésiennes $(1, 3, 1)$. En ce point le torseur \mathcal{F} a pour éléments de réduction :

$$\mathcal{F}(M) = \left\{ \vec{z} = 2\vec{e}_z, \vec{\mathcal{M}}_M = 4\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (en } M).$$

(1) Trouver l'équation de l'axe central Δ de \mathcal{F} .

(2) Quel est le moment en P un point quelconque de l'axe central Δ ?

8. Dans le ROND cartésien usuel, au point O , on considère le torseur $\mathcal{F}(O) = \{ \vec{z} = \vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z, \vec{\mathcal{M}}_O = -3\vec{e}_z \}$. Déterminer le point M où l'axe central Δ de \mathcal{F} rencontre le plan Oyz .

9. Dans le ROND cartésien usuel on considère le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{M}}_\lambda(x, y, z)$ donné par :

$$\vec{\mathcal{M}}_\lambda(x, y, z) = (1 + 3y - \lambda z)\vec{e}_x + (2\lambda z - 3x)\vec{e}_y + (2 + \lambda x - \lambda^2 y)\vec{e}_z, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(1) Obtenir la valeur du champ $\vec{\mathcal{M}}_\lambda$ en O de coordonnées $(0, 0, 0)$.

(2) Sous quelle(s) condition(s) sur λ le champ $\vec{\mathcal{M}}_\lambda$ est-il antisymétrique ?

(3) Pour chaque valeur de λ trouvée :

(a) obtenir la résultante \vec{z} du champ et le torseur \mathcal{F}_λ associé ;

(b) déterminer l'axe central Δ_λ de \mathcal{F}_λ ;

(c) décomposer \mathcal{F}_λ en un couple et un glisseur dont on indiquera les éléments de réduction.

10. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux torseurs tels que $\vec{z} \neq \vec{0}$, $\vec{z}' \neq \vec{0}$ et $\vec{z} \cdot \vec{z}' = 0$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}' = 0$;

(2) les axes centraux de \mathcal{F} et \mathcal{F}' se coupent (à angle droit).

3. CINÉMATIQUE

On rappelle que la cinématique est l'étude du mouvement d'un système indépendamment des causes de ce mouvement. Celle-ci s'effectue une fois un référentiel choisi et les objets nous intéressant sont les vitesses et les accélérations.

a. Étude des mouvements d'un solide

En mécanique du solide l'ensemble des vitesses des points qui constituent le système forment un *champ des vitesses*, que l'on étudie. Nous allons vérifier, dans un premier temps, que celui-ci s'étudie grâce à un torseur puis, dans un deuxième temps, comment ce torseur se rattache aux différents mouvements isométriques de l'espace (euclidien).

§Le champ des vitesses d'un solide. Le champ des vitesses d'un solide permet de retrouver le lien entre les six paramètres repérant un solide et les six paramètres d'un torseur.

Proposition 3. Le champ des vitesses $\vec{v}_{M \in V}$ d'un solide est décrit par un torseur : le **torseur cinématique** \mathcal{V} , ou **torseur des vitesses**, noté

$$\mathcal{V} = \{\vec{\omega}, \vec{v}_M\}_{M \in V},$$

vérifiant la **loi de distribution des vitesses** :

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{A(t)B(t)}, \quad \forall A(t), B(t) \in \text{solide},$$

où la résultante $\vec{\omega}$ est nommée le **vecteur vitesse angulaire** (instantané).

Démonstration. De la définition d'un solide rigide on a :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = C^{te},$$

donc en dérivant par rapport au temps on a :

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = 0,$$

c'est-à-dire que le champ des vitesses du solide est équiprojectif et donc antisymétrique, ainsi il existe une résultante, notée $\vec{\omega}$, telle que la loi de transport des moments soit vérifiée. Ces deux éléments forment un torseur noté $\mathcal{V} = \{\vec{\omega}, \vec{v}_A\}$. \square

Remarque 20. En dérivant la loi de distribution des vitesses par rapport au temps on obtient une loi sur les accélérations :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}),$$

qui, clairement, ne vérifie pas la loi de transport d'un moment et n'est donc pas décrit par un torseur.

L'ensemble des transformations de l'espace qui laissent invariante la distance $\|\overrightarrow{AB}\|$, les *transformations isométriques*, forment le groupe euclidien \mathbb{E}_3 qui est engendré par les *translations* et les *rotations*. On considère ces transformations car ce sont celles compatibles avec l'hypothèse de rigidité du solide. En étudiant celles-ci séparément, puis ensemble, on acquiert une meilleure compréhension du champ des vitesses \vec{v}_M et de son torseur \mathcal{V} .

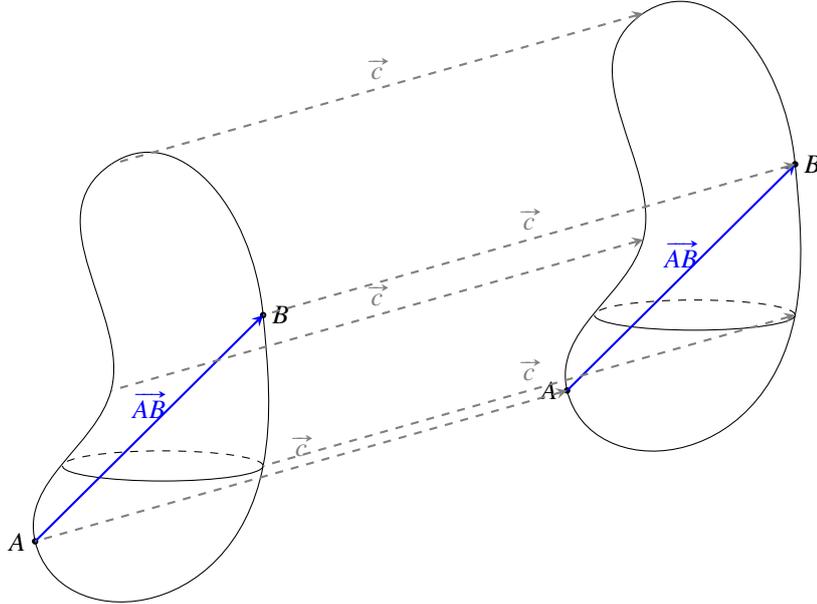


FIGURE 7. Schéma d'une translation d'un solide au cours du temps. La distance ainsi que l'orientation entre deux points A et B arbitraires est préservée. Tous les points sont traduits d'un même vecteur \vec{c} .

§Mouvements de translation.

Définition 13. Un mouvement de **translation** d'un solide, cf. Fig. 7, est tel que :

$$\forall A(t), B(t) \in \text{solide} : \overrightarrow{A(t)B(t)} = \vec{c}^{te}$$

Remarque 21. En prenant la norme de \overrightarrow{AB} on vérifie que les translations sont des isométries.

Propriété 11. Le torseur \mathcal{V} se réduit à un couple lors d'une translation et réciproquement :

$$\mathcal{V}_{\text{couple}} \Leftrightarrow \text{translation.}$$

Démonstration. Supposons que le solide soit animé d'un mouvement de translation, alors : $\overrightarrow{AB} = \vec{c}^{te}$, en dérivant par rapport au temps on a alors :

$$\vec{0} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{0},$$

c'est-à-dire que pour tous points du solide $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ donc que le torseur des vitesses est un couple.

Supposons que le torseur cinématique soit un couple $\mathcal{V} = \{\vec{0}, \vec{v}\}$, alors $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ et en remontant la dérivation précédente par intégration on établit que $\overrightarrow{AB} = \vec{c}^{te}$, c'est-à-dire que le solide est animé d'un mouvement de translation. □

§Mouvements de rotation.

Définition 14. Une **rotation** est définie par un axe $\Delta = (P, \vec{e}_\Delta)$, passant par le point P et orienté par \vec{e}_Δ , et un angle φ , où en notant $B = \mathcal{R}_{\varphi, \Delta}(A)$ l'image de A par cette rotation, telle que :

- pour $M \in \Delta : \mathcal{R}_{\varphi, \Delta}(M) = M,$

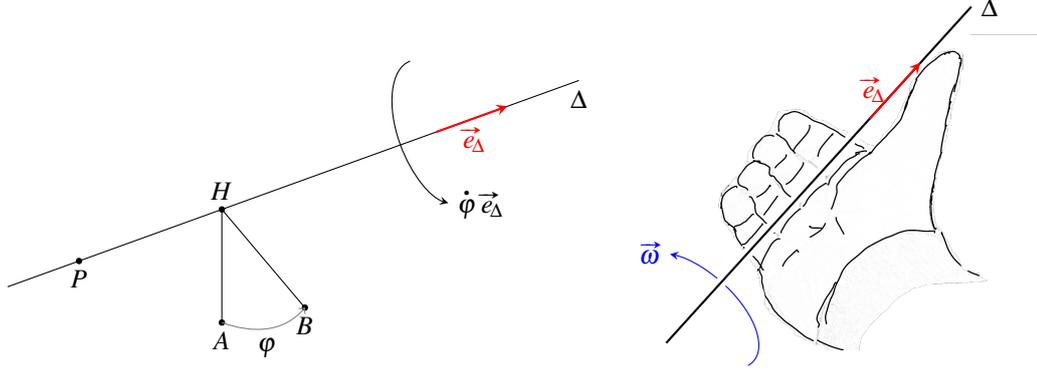


FIGURE 8. A gauche, schéma de référence définissant une rotation d'angle φ autour d'une droite Δ passant par le point P et orientée par \vec{e}_Δ . A droite, règle d'orientation d'une droite et d'une rotation par la main droite : l'axe est orienté le long du pouce et la rotation s'effectue suivant l'enroulement des autres doigts enrobant cet axe.

- en notant H la projection orthogonale de A sur Δ on a :
 - $\|\vec{HA}\| = \|\vec{HB}\|$, $\angle(\vec{HA}, \vec{HB}) = \varphi$,
 - $\{\vec{HA}, \vec{HB}, \vec{e}_\Delta\}$ est directe.

Remarque 22. Cela revient à dire que l'on fait tourner les points autour de Δ dans le plan orthogonal à Δ . Notons que cela implique une *orientation* donnée par l'orientation de Δ par le vecteur \vec{e}_Δ , cf. Fig. 8. On rappelle d'ailleurs la convention graphique suivante : en prenant sa main *droite* si on place son pouce suivant \vec{e}_Δ le sens de rotation directe pointe suivant l'enroulement des autres doigts.

Propriété 12. *Le torseur \mathcal{V} se réduit à un glisseur lors d'une rotation et réciproquement :*

$$\mathcal{V}_{\text{glisseur}} \Leftrightarrow \text{rotation.}$$

Dans ce cas la résultante du glisseur est $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_\Delta$ et l'axe du glisseur est l'axe Δ vis-à-vis duquel on effectue la rotation.

Démonstration. Supposons que le solide soit animé d'un mouvement de rotation avec $\mathcal{R}_{\varphi(t), \Delta}(A_0) = A(t)$ avec $\varphi(t=0) = 0$ de telle sorte que $A(t=0) = A_0$, par exemple. Notons déjà que pour tous les points de Δ on a $\vec{v}_{A \in \Delta} = \vec{0}$, ce qui fait de Δ l'axe du torseur qui est nécessairement un glisseur vu que son moment s'y annule. Il reste à établir l'identité entre la résultante $\vec{\omega}$ et $\dot{\varphi} \vec{e}_\Delta$. Alors, en notant H la projection orthogonale de A_0 sur Δ , avec H qui est un point fixe sous la rotation, et en introduisant temporairement la base cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\Delta\}$ pour décrire la rotation autour de Δ , on a :

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \frac{d}{dt} \vec{OA} = \frac{d}{dt} (\vec{OH} + \vec{HA}) = \frac{d}{dt} (\rho \vec{e}_\rho) = \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\Delta \wedge \vec{e}_\rho = (\dot{\varphi} \vec{e}_\Delta) \wedge (\rho \vec{e}_\rho) = \vec{\omega} \wedge \vec{HA}, \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_\Delta, \end{aligned}$$

en notant $\rho = \|\vec{HA}\|$, constant sous la rotation, et où dans la deuxième ligne on retravaille l'expression obtenue pour la rendre indépendante de la base cylindrique. A présent, si l'on considère $B(t)$ de projection orthogonale G sur Δ on a : $\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{GB}$ ce qu'on peut écrire aussi comme :

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{GB} = (\vec{v}_A - \vec{\omega} \wedge \vec{HA}) + \vec{\omega} \wedge \vec{GB} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{GB} - \vec{HA} + \vec{HG}) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB},$$

en utilisant l'astuce de rajouter zéro et le fait que $\overrightarrow{HG} \propto \vec{e}_\Delta$ et donc que $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HG} = \vec{0}$, vu que H et G sont deux points de Δ . Alors $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_\Delta$ est bien la résultante du glisseur étant donné qu'elle apparaît comme telle dans la loi de transport.

Supposons à présent que le torseur des vitesses soit un glisseur. Notons déjà que les points de l'axe du glisseur, que l'on notera Δ , sont fixes, ce qui interdit toutes les translations. On note en plus $\vec{e}_\Delta = \vec{\omega} / \|\vec{\omega}\|$ vu que l'axe d'un torseur est orienté par sa résultante. Pour un point A arbitraire et H sa projection orthogonale sur l'axe du glisseur on a $\vec{v}_A = \vec{v}_H + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HA}$. Alors, en tirant parti de l'orthogonalité entre \vec{e}_Δ , \overrightarrow{HA} et en intégrant les équations par rapport au temps on aboutit à la rotation du solide telle que $\omega = \dot{\phi}$. \square

§Mouvement arbitraire.

Proposition 4. *Un mouvement arbitraire est la composition d'une rotation d'axe Δ , l'axe central du torseur \mathcal{V} , et d'une translation le long de Δ on parle alors de **vissage** ou de **mouvement hélicoïdal**.*

Démonstration. Application directe du théorème de décomposition d'un torseur en couple et glisseur. \square

Remarque 23. On peut aussi établir ce théorème en résolvant *brutalement* l'équation différentielle $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, dont la solution est la somme d'une rotation de vitesse angulaire $\|\vec{\omega}\|$ dans le plan orthogonal à $\vec{\omega}$ et d'une translation le long de la droite orientée par $\vec{\omega}$ à la vitesse $(\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O) / \|\vec{\omega}\|$.

Remarque 24. On n'oubliera pas qu'il s'agit de rotation instantanée, de translation instantanée. D'un instant à un autre l'axe de rotation peut changer, la vitesse angulaire de même, tout comme la quantité de translation. On dit être *tangent* à de tels mouvements.

b. Rappels sur les changements de référentiels

Dès lors qu'on a plusieurs solides il est naturel de faire intervenir plusieurs référentiels. En effet, on étudie les systèmes dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_L , à un premier solide on attache rigidement un référentiel \mathcal{R}_1 , à un deuxième solide on attache rigidement un référentiel \mathcal{R}_2 , ... en supposant toutes les horloges synchronisées pour simplifier. Ayant plusieurs référentiels simultanément il peut être bon de rappeler comment sont reliées entre elles les quantités cinématiques entre ces différents référentiels.

§Loi de composition des vitesses. Fixons deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , cf. Fig. 9, synchronisés :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{O, \mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}, H\}, \\ \mathcal{R}' &= \{O', \mathcal{B}' = \{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\}, H\}. \end{aligned}$$

où \mathcal{B} est une base fixe dans \mathcal{R} et \mathcal{B}' est une base fixe dans \mathcal{R}' alors que, par exemple, \mathcal{B}' est une base mobile dans \mathcal{R} .

Propriété 13. *Soit M un point mobile, soit $\vec{v} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ sa vitesse relativement au référentiel \mathcal{R} , respectivement $\vec{v}' = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ celle relativement à \mathcal{R}' , alors ces vitesses vérifient la **loi de composition des vitesses** :*

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e,$$

où \vec{v}_e est la **vitesse d'entraînement** donnée par :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M},$$

où O' est l'origine de \mathcal{R}' et $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ le vecteur vitesse angulaire de \mathcal{B}' dans \mathcal{R} .

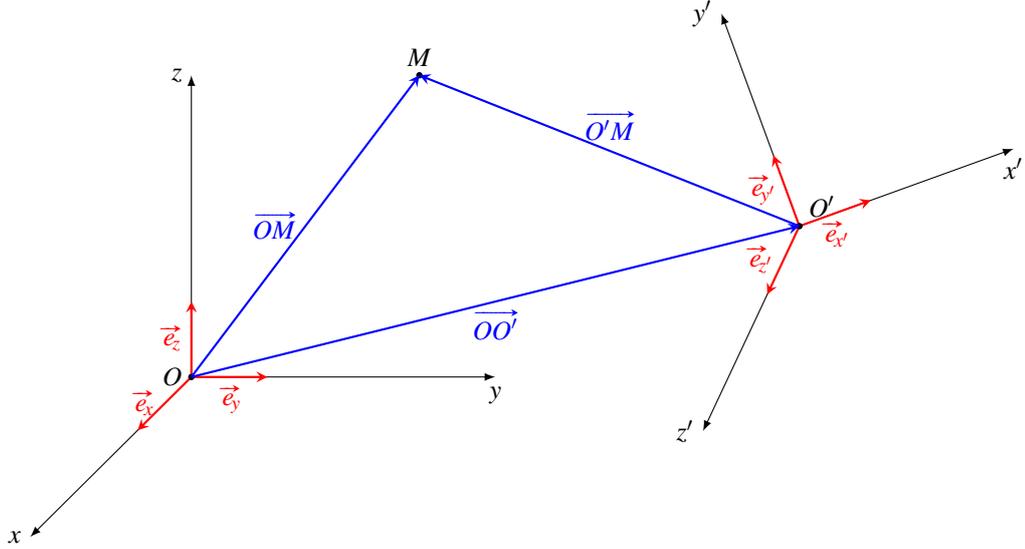


FIGURE 9. Schéma de deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' relativement auxquels on étudie la cinématique du point mobile M .

Démonstration. On étudie la cinématique du point mobile M relativement aux deux référentiels, on a :

$$\text{dans } \mathcal{R} : \overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z,$$

$$\text{dans } \mathcal{R}' : \overrightarrow{O'M}(t) = x'(t) \vec{e}_{x'} + y'(t) \vec{e}_{y'} + z'(t) \vec{e}_{z'},$$

$$\vec{v}' = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{O'M}(t) = \dot{x}'(t) \vec{e}_{x'} + \dot{y}'(t) \vec{e}_{y'} + \dot{z}'(t) \vec{e}_{z'},$$

comme d'habitude du simple fait que \mathcal{B} est fixe dans \mathcal{R} et \mathcal{B}' l'est dans \mathcal{R}' . Mais l'on peut aussi employer la relation de Chasles :

$$\text{dans } \mathcal{R} : \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + (x'(t) \vec{e}_{x'}(t) + y'(t) \vec{e}_{y'}(t) + z'(t) \vec{e}_{z'}(t)),$$

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t)) \\ &= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + [(\dot{x}'(t) \vec{e}_{x'}(t) + \dot{y}'(t) \vec{e}_{y'}(t) + \dot{z}'(t) \vec{e}_{z'}(t)) + (x'(t) \dot{\vec{e}}_{x'}(t) + y'(t) \dot{\vec{e}}_{y'}(t) + z'(t) \dot{\vec{e}}_{z'}(t))] \\ &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + (x'(t) \dot{\vec{e}}_{x'}(t) + y'(t) \dot{\vec{e}}_{y'}(t) + z'(t) \dot{\vec{e}}_{z'}(t)), \end{aligned}$$

où dans la dérivation par rapport au temps de l'expression en coordonnées de $\overrightarrow{O'M}(t)$ on a tenu compte du fait que la base \mathcal{B}' est une base *mobile* dans \mathcal{R} , ce qui fait apparaître les dérivées de ses vecteurs de base. L'expression ainsi obtenue n'est guère agréable mais, par exemple, introduisons relativement à \mathcal{R} le **trièdre solide** $O'ABC$ tel que $\overrightarrow{O'A} = \vec{e}_{x'}$, $\overrightarrow{O'B} = \vec{e}_{y'}$ et $\overrightarrow{O'C} = \vec{e}_{z'}$ avec $\|\overrightarrow{O'A}\| = \|\vec{e}_{x'}\| = 1$ (quel que soit t). On en déduit immédiatement que :

$$\dot{\vec{e}}_{x'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{O'A} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'}) = \vec{v}_A - \vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'A} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{x'},$$

où l'on utilise le fait que le trièdre solide est un solide donc que les points qui le constituent vérifient la loi de distribution des vitesses avec

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{R}}$$

le vecteur vitesse angulaire de la base \mathcal{B}' dans \mathcal{R} ou, abusivement, de \mathcal{R}' vis-à-vis de \mathcal{R} . On a la même identité qui est vérifiée pour $\dot{\vec{e}}_y'$ et $\dot{\vec{e}}_z'$, on en déduit immédiatement que :

$$x'(t)\dot{\vec{e}}_x'(t) + y'(t)\dot{\vec{e}}_y'(t) + z'(t)\dot{\vec{e}}_z'(t) = \vec{\omega} \wedge (x'(t)\vec{e}_x'(t) + y'(t)\vec{e}_y'(t) + z'(t)\vec{e}_z'(t)) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M},$$

ce qui permet de conclure la démonstration. \square

Remarque 25. Notons en passant, que dans la démonstration lorsque l'on a effectué la dérivation par rapport au temps de $\overrightarrow{O'M}$, on a établi la **formule de Bour** :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{|\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{|\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}.$$

Propriété 14. Entre plusieurs référentiels \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et \mathcal{R}_3 les vitesses angulaires se composent par addition :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}.$$

Démonstration. En effet, on indice par 1 les quantités propres au premier référentiel et 2 et 3 celles du second et troisième, respectivement. Pour M un point mobile d'intérêt on peut écrire indifféremment :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M/\mathcal{R}_1} &= \vec{v}_{M/\mathcal{R}_2} + \vec{v}_{O_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \\ &= \vec{v}_{M/\mathcal{R}_3} + \vec{v}_{O_3/\mathcal{R}_1} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_3M} \end{aligned}$$

mais, toujours pour le point M , l'on a aussi

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}_2} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}_3} + \vec{v}_{O_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \overrightarrow{O_3M}.$$

En utilisant la loi de composition des vitesses entre \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sur l'origine O_3 de \mathcal{R}_3 , qui est un point mobile dans ces deux référentiels, on a :

$$\vec{v}_{O_3/\mathcal{R}_1} = \vec{v}_{O_3/\mathcal{R}_2} + \vec{v}_{O_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2O_3}.$$

Alors, en injectant l'expression de $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_2}$ dans la première de $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}$ et $\vec{v}_{O_3/\mathcal{R}_1}$ dans la seconde de $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}$, après simplifications, on a :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \overrightarrow{O_3M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2O_3} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_3M},$$

c'est-à-dire, en passant les termes dans le membre de gauche et employant la relation de Chasles :

$$(\vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}) \wedge \overrightarrow{O_3M} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_3M}. \quad \square$$

Remarque 26. Ceci est particulièrement intéressant pour nous dans le cas où plusieurs solides (ou même un seul) sont en rotation, alors on a une loi simple à manipuler concernant leur mouvement de rotation relatifs.

§Loi de composition des accélérations. Identiquement au cas des vitesses il y a une loi de composition en entre les différentes accélérations dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Propriété 15. Pour un point M dont on note \vec{v} et \vec{a} la vitesse et l'accélération dans \mathcal{R} , respectivement \vec{v}' et \vec{a}' dans \mathcal{R}' d'origine O' , on note $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de \mathcal{B}' relativement à \mathcal{R} , alors les accélérations vérifient la **loi de composition des accélérations** :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

avec :

- l'**accélération d'entraînement** : $\vec{a}_e = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$, qui ne dépend que de la position relative de M par rapport à O' ,
- l'**accélération de Coriolis** : $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$, qui elle dépend de la vitesse de M dans \mathcal{R}' .

Démonstration. On dérive la loi de composition des vitesses par rapport au temps et relativement à \mathcal{R} :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

en employant la formule de Bour dans le cas où la quantité est définie relativement \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \dot{\vec{\omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) \end{aligned}$$

en revenant en notations moins explicites et en regroupant les termes on a :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \left(\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) \right) + 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}'. \quad \square$$

Remarque 27. La vitesse d'entraînement \vec{v}_e et l'accélération d'entraînement \vec{a}_e ne sont pas liées entre elles : $\vec{a}_e \neq \dot{\vec{v}}_e$.

c. Étude sommaire du mouvement de deux solides en contact ponctuel

§Géométrie du problème. Soient S_1 et S_2 deux solides étudiés dans le référentiel du laboratoire, cf. Fig. 10. À l'instant t ils sont en contact ponctuel en un point I . Ce point I correspond à *trois points coïncidant* à cet instant :

- un point I_1 appartenant au solide S_1 ,
- un point I_2 appartenant au solide S_2 ,
- un point géométrique de l'espace,

ainsi :

$$I(t) = I_1(t) = I_2(t).$$

§Vitesse de glissement entre deux solides.

Définition 15. Soient S_1 et S_2 deux solides en contact ponctuel en I , on appelle **vitesse de glissement** de S_2 sur S_1 la vitesse définie par :

$$\vec{v}_{gl} = \vec{v}_{I_2 \in S_2 / S_1},$$

c'est-à-dire la vitesse du point $I_2 \in S_2$ relativement au référentiel rigidement lié à S_1 .

Autant cette définition est satisfaisante et "naturelle" physiquement, autant ce n'est pas nécessairement l'expression la plus simple à manipuler dans la pratique.

Propriété 16. La vitesse de glissement de S_2 sur S_1 en contact ponctuel en I s'écrit, dans le référentiel du laboratoire, comme :

$$\vec{v}_{gl} = \vec{v}_{I_2} - \vec{v}_{I_1}.$$

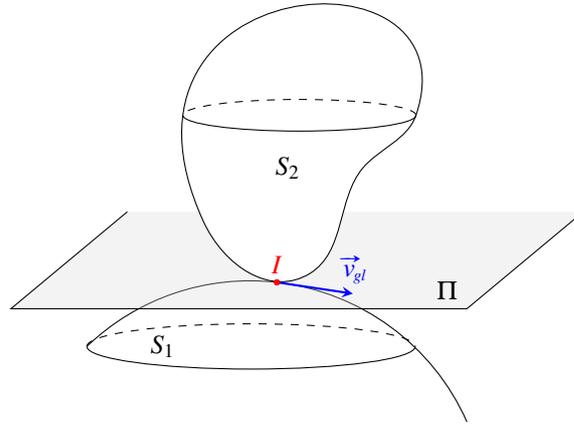


FIGURE 10. Contact ponctuel en I entre les deux solides S_1 et S_2 . La vitesse de glissement \vec{v}_{gl} de S_2 sur S_1 est alors la vitesse relative entre les deux points coïncidents $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ en I . Cette vitesse de glissement appartient au plan tangent Π aux deux solides.

Démonstration. Il s'agit d'employer les formules de changement de référentiels où apparaît la vitesse d'entraînement. Notons que :

$$\vec{v}_{I_1/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_1/S_1} + \vec{v}_{S_1/\mathcal{R}} = \vec{v}_{S_1/\mathcal{R}},$$

mais aussi

$$\vec{v}_{I_2/\mathcal{R}} = \vec{v}_{I_2/S_2} + \vec{v}_{S_2/\mathcal{R}} = \vec{v}_{gl} + \vec{v}_{S_2/\mathcal{R}} = \vec{v}_{gl} + \vec{v}_{I_1/\mathcal{R}}. \quad \square$$

Remarque 28. Vu que \vec{v}_{I_1} est tangent à S_1 en I , que \vec{v}_{I_2} est tangent à S_2 en I , alors, comme $\vec{v}_{gl} = \vec{v}_{I_2} - \vec{v}_{I_1}$, la vitesse de glissement de S_2 sur S_1 appartient à un plan tangent Π à S_1 et S_2 en I , cf. Fig. 10.

§Pivotement et roulement. On a décrit le mouvement de glissement d'un solide sur un autre, on peut décomposer plus en détails ce mouvement relatif.

Définition 16. Soient S_1 et S_2 deux solides en contact ponctuel en un point I , soit Π le plan tangent à ces deux solides en I , cf. Fig. 11. Soit $\mathcal{Z}_2 = \{\vec{\omega}, \vec{v}_M\}$ le torseur des vitesses du second solide, on décompose le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ relativement à Π :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel,$$

où $\vec{\omega}_\perp$ est normal à Π et $\vec{\omega}_\parallel$ lui est parallèle. Alors :

- $\vec{\omega}_\parallel$ engendre une rotation correspondant au **roulement**, ou **basculement**, de S_2 sur S_1 ,
- $\vec{\omega}_\perp$ engendre une rotation correspondant au **pivotement** de S_2 sur S_1 .

Remarque 29. On peut découper le mouvement relatif d'un solide sur un autre en mouvements "purs" :

$$\begin{cases} \vec{v}_{gl} = \vec{0}, & \vec{\omega}_\parallel = \vec{0}, & \vec{\omega}_\perp \neq \vec{0}, & : \text{pivotement pur} & (\text{glisseur}), \\ \vec{v}_{gl} = \vec{0}, & \vec{\omega}_\parallel \neq \vec{0}, & \vec{\omega}_\perp = \vec{0}, & : \text{roulement/basculement pur} & (\text{glisseur}), \\ \vec{v}_{gl} \neq \vec{0}, & \vec{\omega}_\parallel = \vec{0}, & \vec{\omega}_\perp = \vec{0}, & : \text{glissement pur} & (\text{couple}), \end{cases}$$

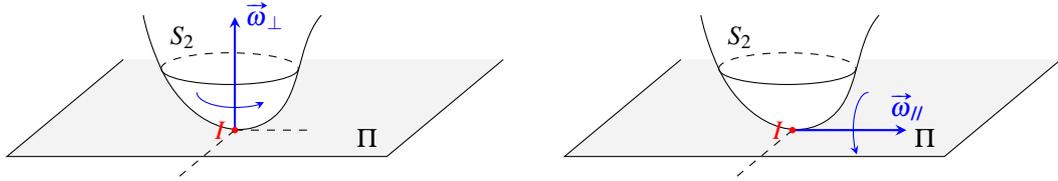


FIGURE 11. Lorsqu'un solide, ici S_2 , est en contact ponctuel en I avec un autre solide on peut décomposer son vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ en une partie $\vec{\omega}_\perp$ orthogonale au plan Π tangent aux deux solides en I correspondant à une rotation de *pivotement* sur le second solide, à gauche, et en une partie $\vec{\omega}_\parallel$ parallèle à Π correspondant à une rotation de *roulement* ou de *basculement*, à droite.

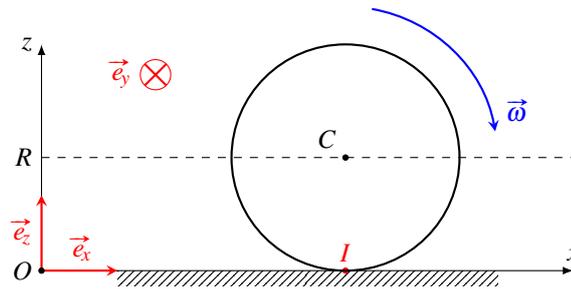


FIGURE 12. Roue roulant sans glisser, ni pivoter, sur le plan horizontal d'équation $z = 0$ de l'exemple 3.

où dans le cas d'un glissement pur le torseur des vitesses \mathcal{V} se réduit à un couple et dans le cas d'un pivotement pur ou d'un roulement pur \mathcal{V} se réduit à un glisseur dont l'axe (de rotation) passe par le point de contact I .

Exemple 3. Une roue de centre C et de rayon R roule sans glisser, ni pivoter, sur le sol horizontal confondu avec le plan d'équation $z = 0$ en Fig. 12. Le mouvement est supposé plan. Le sol est considéré comme étant le premier solide, S_1 , au repos dans le référentiel du laboratoire, et la roue comme le second solide. La roue ne pivotant pas on a $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$, avec $\omega \in \mathbb{R}$, et le mouvement est plan. L'absence de glissements impose :

$$\vec{v}_{g1} = \vec{v}_{I_2} = \vec{0}.$$

La géométrie du problème, en choisissant bien le repère, impose $y_C = 0$ et $z_C = R$ (les deux solides sont en contact et ne s'interpénètrent pas). Notons à présent que l'on a simultanément :

$$\vec{v}_C = \dot{x}_C \vec{e}_x = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_2 C} = (\omega \vec{e}_y) \wedge (R \vec{e}_z) = R\omega \vec{e}_x$$

ce qui donne l'équation de liaison : $\dot{x}_C = R\omega$.

Exercices

11 *Rotation d'une barre.* Une barre rigide de longueur ℓ tourne dans \mathcal{R} autour de l'axe Oz dans le plan Oxy avec un vecteur vitesse angulaire constant $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, cf. Fig. 13. À l'instant initial $t = 0$ la barre est confondue avec l'axe Ox .

Une particule se déplace le long de cette barre avec une vitesse constante \vec{v}_0 dans le référentiel \mathcal{R}' attaché à la barre. À l'instant initial $t = 0$ le point M est confondu avec l'origine O (commune à \mathcal{R} et \mathcal{R}').

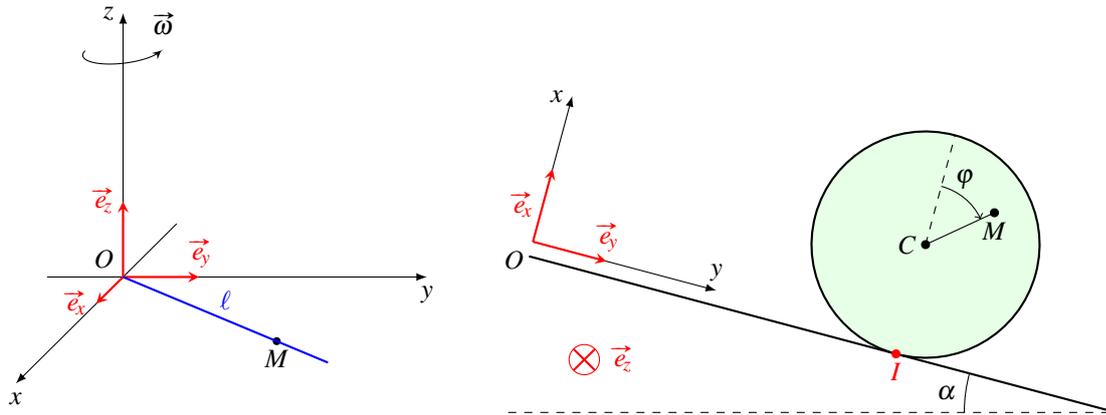


FIGURE 13. Barre en rotation de l'exercice 11 et disque roulant sur un plan incliné de l'exercice 12.

- (1) Obtenir l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ dans les différents référentiels. En déduire l'expression de la vitesse dans les différents référentiels.
- (2) Calculer à nouveau la vitesse \vec{v}_M en exploitant la loi de composition des vitesses.

12 *Disque roulant sur un plan incliné.* On considère un disque D de centre C et de rayon R roulant sans glisser ni pivoter le long d'un plan incliné P faisant un angle α avec l'horizontale, cf. Fig. 13. Au plan P (solide) on attache un repère \mathcal{R} cartésien tel que \vec{e}_x soit normal à P et \vec{e}_y suivant la ligne de plus grande pente. Le disque est supposé appartenir, à tout instant, au plan Oxy . On considère un point M du disque et on note φ l'angle que fait \overrightarrow{CM} avec \vec{e}_x .

- (1) Montrer que le mouvement de D est une rotation pure d'axe instantané $\Delta = (I, \vec{e}_z)$ et que $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.
- (2) Calculer la norme $v_M = \|\vec{v}_M\|$ de la vitesse d'un point M de D . Dessiner le champ (instantané) des vitesses à l'intérieur de D .
- (3) Relier les vitesses de I et C , en déduire une expression liant $v_C = \|\vec{v}_C\|$ à ω .
- (4) En dérivant deux fois le vecteur position \overrightarrow{OM} d'un point M quelconque de D repéré par ses coordonnées (polaires) $\rho = \|\overrightarrow{CM}\|$ et φ , donner l'expression générale de sa vitesse et de son accélération. Exprimer ces résultats en fonction $v_C, \dot{v}_C, \varphi, \dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$. Étudier en particulier le cas où $M = I$.

13 *Base et roulante d'une échelle.* Une échelle de longueur h s'appuie contre un mur (en $x = 0$) en B et repose sur le sol (en $z = 0$) en A . L'échelle peut glisser le long du mur et du sol en maintenant ses contacts en ses extrémités A et B . On note α l'angle que la perpendiculaire à AB forme avec l'axe Ox , cf. Fig. 14.

- (1) Déterminer le centre C de rotation de l'échelle dans \mathcal{R} , analytiquement et géométriquement.
- (2) Trouver la trajectoire de C dans \mathcal{R} , i.e. la *base* du mouvement de l'échelle.
- (3) Trouver la trajectoire de C dans le référentiel \mathcal{R}' d'origine A et lié à l'échelle tel que $\overrightarrow{AB} \propto \vec{e}_z'$, i.e. la *roulante* du mouvement.

14 *Roulements à billes.* Trois cercles C_1, C_2 et C_3 sont en contact entre eux et roulent sans glisser. On note R_1 le rayon de C_1 et R_2 celui de C_2 . On note C le centre de C_3 , cf. Fig. 14. Établir l'équation qui relie $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ et $\vec{\omega}_3$.

15 *Mise en rotation d'un disque par un cône.* On cherche à faire tourner un disque D autour de son axe Oz à partir d'un axe incliné Oz' . Pour ce faire on utilise un cône C qui roule sans glisser sur le disque. Le

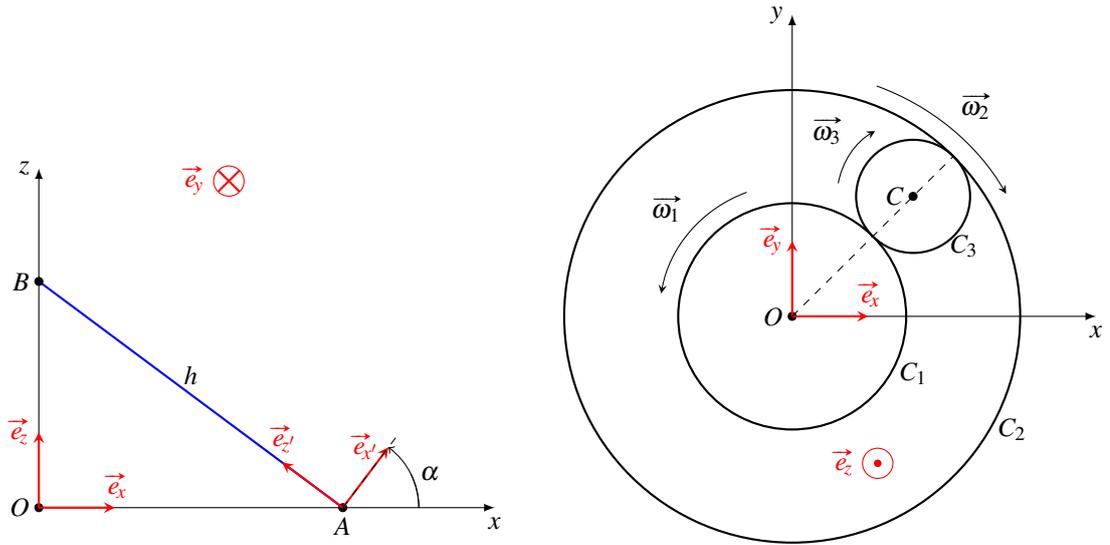


FIGURE 14. Cinématique d'une échelle glissant sur le sol de l'exercice 13 et les trois cercles en contact réalisant un roulement à billes de l'exercice 14.

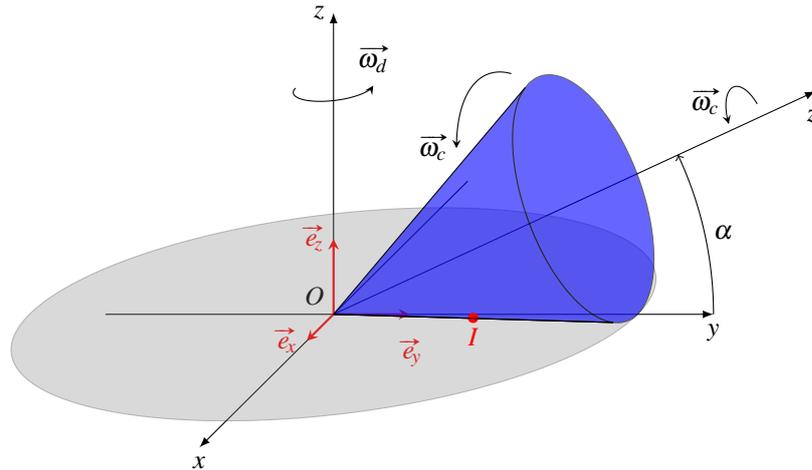


FIGURE 15. Disque, en gris, mis en mouvement par la rotation d'un cône, en bleu, de l'exercice 15.

cône, de demi-angle au sommet α , tourne autour de Oz' à la vitesse angulaire ω_c . On note ω_d la vitesse de rotation de D autour de Oz , cf. Fig. 15.

- (1) Exprimer en un point I de la génératrice de contact situé à la distance d de O , le long de Oy , la condition de roulement sans glissement.
- (2) Trouver la valeur de α telle que $\omega_c = 2\omega_d$.

4. GÉOMÉTRIE DES MASSES

Dans le contexte dans lequel on se place on a à présent de la masse distribuée dans l'espace, ponctuellement ou continûment. Il est alors intéressant de dégager les caractéristiques principales de cette distribution, telle que son "centre", son extension caractéristique, ...

Définition 17. Soit un ensemble, continu ou discret, de points affectés d'une (densité de) masse strictement positive, on définit la **masse totale**, ou plus simplement la **masse**, du système comme étant la somme de toutes les masses constituant le système :

$$m_{\text{tot}} = \sum_i m_i = \iiint_{M \in V} \rho(M) dV,$$

où ρ est la **densité volumique de masse** (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$). S'il n'y a pas d'ambiguïtés possible on notera cette masse totale simplement m .

Remarque 30. Le solide peut aussi être une surface ou une courbe. Dans ce cas on parlera de **densité surfacique de masse** σ (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) et de **densité linéique de masse** λ (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$), respectivement.

a. Le barycentre et ses propriétés

Face à une distribution (positive), de quoi que ce soit, il est intéressant de déterminer ses caractéristiques que sont les valeurs moyennes, écart type et les différents moments qui lui sont associés.

Définition 18. La position du **barycentre** G , ou du **centre d'inertie** du système, est donnée par la valeur moyenne du rayon vecteur pointant sur le système contre la distribution normalisée ρ/m_{tot} :

$$\vec{OG} = \langle \vec{OM} \rangle_{M \in V} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \left(\sum_i m_i \vec{OM}_i \right) = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \iiint_{M \in V} \rho(M) \vec{OM} dV.$$

Remarque 31. La définition que l'on propose ici fournit directement une formule permettant de déterminer la position du barycentre. L'intérêt de ce point sera révélé dans la section suivante mais on peut déjà annoncer sans euphémisme qu'il s'agit du point le plus important associé à un système (massif).

Propriété 17. Le barycentre vérifie l'équation utile suivante :

$$\sum_i m_i \vec{GM}_i = \iiint_{M \in V} \rho(M) \vec{GM} dV = \vec{0}.$$

Démonstration. Par application de la formule de Chasles et en employant la définition de G :

$$\sum_i m_i \vec{GM}_i = \sum_i m_i (\vec{OM}_i - \vec{OG}) = \left(\sum_i m_i \vec{OM}_i \right) - \vec{OG} \left(\sum_i m_i \right) = m_{\text{tot}} \vec{OG} - \vec{OG} m_{\text{tot}} = \vec{0}. \quad \square$$

Le barycentre, ici, est défini par une somme il en hérite alors les propriétés évidentes telles que la somme totale est la somme des sommes partielles.

Propriété 18. Le barycentre G est obtenu comme étant le barycentre des barycentres partiels, chacun affecté de la masse de la portion du solide dont ils sont le barycentre :

$$m_{\text{tot}} \vec{OG} = m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + \dots, \quad m_{\text{tot}} = m_1 + m_2 + \dots$$

Démonstration. Notons que le volume V est l'union de deux volumes partiels $V = V_1 \cup V_2$, avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, on note m_1 la masse de la portion V_1 , respectivement m_2 celle de V_2 . Alors :

$$m_{\text{tot}} \vec{OG} = \iiint_{M \in V} \rho(M) \vec{OM} dV = \iiint_{M \in V_1} \rho(M) \vec{OM} dV + \iiint_{M \in V_2} \rho(M) \vec{OM} dV = m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2,$$

en employant la propriété d'additivité par rapport au domaine de l'intégrale (somme). Le calcul s'étend naturellement à toute partition (finie) de V . \square

Cette propriété d'additivité des barycentres est très utile pour les solides qui sont des "collages" de solides élémentaires tels que, par exemple, un cylindre terminé par deux hémisphères, un pavé surmonté d'un cône à base rectangulaire, etc. On joue alors aux Legos et détermine d'abord les positions des barycentres des solides élémentaires, puis le barycentre du système total en calculant le barycentre de ces barycentres.

b. L'opérateur d'inertie et ses propriétés

Le barycentre est déterminé par la valeur moyenne de \overrightarrow{OM} parcourant le solide et pondéré (littéralement) par la distribution de masse $\rho(M)$. Vis-à-vis d'une distribution il est aussi nécessaire de connaître les moments d'ordre supérieur, ne serait-ce que les moments quadratiques tels que :

$$m\langle x^2 \rangle = \iiint_{M \in V} x^2 \rho(M) dV, \quad m\langle xy \rangle = \iiint_{M \in V} xy \rho(M) dV, \quad \dots$$

Pour ce qui est de la mécanique du solide on peut "empaqueter" les différents moments quadratiques qui nous seront utiles dans l'opérateur suivant.

Définition 19. On définit l'**opérateur d'inertie** relativement au point A , noté \vec{I}_A (en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$), de telle sorte que, pour un vecteur arbitraire \vec{u} , on ait :

$$\vec{I}_A(\vec{u}) = \iiint_{M \in V} \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) \rho(M) dV.$$

Les éléments de l'opérateur d'inertie sont les **moments d'inertie**.

Remarque 32. L'opérateur d'inertie peut aussi s'appeler la *matrice d'inertie* ou le *tenseur d'inertie* et il peut tout autant être noté par la lettre J , ou en employant le symbole \vec{I} ou \vec{J} , comme les tenseurs seront notés dans le cours de mécanique des milieux continus par exemple.

Propriété 19. L'opérateur d'inertie est une application linéaire symétrique, il se représente alors par une matrice symétrique réelle 3×3 .

Démonstration. Par linéarité il est entendu linéarité vis-à-vis de \vec{u} , ce qui est évident des propriétés du produit vectoriel. La symétrie est établie en remarquant que :

$$\vec{v} \cdot [\overrightarrow{AM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM})] = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot (\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM}) = \vec{u} \cdot [\overrightarrow{AM} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM})],$$

en employant les propriétés du produit mixte, c'est-à-dire que $\vec{v} \cdot \vec{I}_A(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{I}_A(\vec{v})$, après sommation sur les points M constituant le solide. \square

Remarque 33. Comme toutes les matrices symétriques réelles (MSR) la matrice d'inertie est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base dans laquelle celle-ci s'écrit comme :

$$I_A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Une telle base est celle des **axes principaux** d'inertie du solide. Cette base permet, en outre, une classification des solides :

- si $I_1 = I_2 = I_3$ le solide est une **toupie sphérique**,
- si $I_1 = I_2 \neq I_3$ le solide est une **toupie symétrique**,
- si les trois moments sont différents il s'agit d'un **toupie asymétrique**.

Comme nous le verrons, généralement nous n’aurons pas à diagonaliser la matrice d’inertie. Les symétries du systèmes permettent rapidement d’identifier les axes principaux du solide.

Propriété 20. Dans le repère cartésien usuel d’origine O on a :

$$I_O = \iiint_{M \in V} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(x, y, z) dV.$$

Démonstration. Calcul direct avec $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et où : « Les colonnes de la matrice sont les images des vecteurs de la base de départ (exprimées dans le système de coordonnées de la base d’arrivée) ». Par exemple, la première colonne de la matrice est obtenue en évaluant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ -xy \\ -xz \end{pmatrix}. \quad \square$$

Remarque 34. La matrice d’inertie est, à des conventions de signes et une altération de la diagonale près, la matrice de covariance de la distribution (de probabilité) ρ . Elle contient les corrélations entre les différentes variables, ici directions, dans ses éléments hors de la diagonale.

L’opérateur d’inertie est défini relativement à un point, il dépend de ce point, ce qui en fait une *champ*. Il vérifie donc une loi de transformation entre deux points A et B , par exemple, et surtout entre un point arbitraire A et le barycentre G .

Propriété 21. Pour G le barycentre du solide, l’opérateur d’inertie vérifie la loi de transport suivante :

$$\vec{I}_A(\vec{u}) = \vec{I}_G(\vec{u}) + m\vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}).$$

Démonstration. Après avoir employé la relation de Chasles : $\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{GM}$ et en distribuant on a trois types d’intégrales à calculer : celle où \vec{GM} apparaît deux fois donnant $\vec{I}_G(\vec{u})$ par définition, celles où \vec{GM} apparaît une fois et où l’équation

$$\iiint_{M \in V} \vec{GM} \rho(M) dV = \vec{0},$$

simplifie le calcul et celle où \vec{GM} n’apparaît pas et où la somme sur M donne la masse totale m . □

Remarque 35. La loi de transport de l’opérateur fait apparaître un terme additionnel qui est *indépendant du solide*, si ce n’est par sa masse m , et ne dépend que des coordonnées des points A et G , explicitement :

$$I_A = I_G + m \begin{pmatrix} (y_G - y_A)^2 + (z_G - z_A)^2 & -(x_G - x_A)(y_G - y_A) & -(x_G - x_A)(z_G - z_A) \\ -(x_G - x_A)(y_G - y_A) & (x_G - x_A)^2 + (z_G - z_A)^2 & -(y_G - y_A)(z_G - z_A) \\ -(x_G - x_A)(z_G - z_A) & -(y_G - y_A)(z_G - z_A) & (x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 \end{pmatrix}.$$

Dans la pratique c’est avec ces deux dernières propriétés qu’on calcule les éléments de la matrice d’inertie I . D’abord vis-à-vis de l’origine O puis, si G n’est pas confondu avec O , vis-à-vis du barycentre G en transportant la matrice, cf. exemple 6 ci-après.

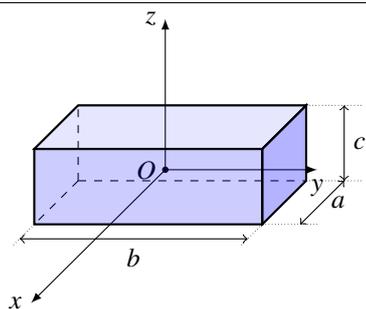
c. Moment d’inertie vis-à-vis d’une droite

L’opérateur d’inertie est l’opérateur général contenant les moments quadratiques de la distribution ρ . Dans certains cas on n’aura besoin que d’une version restreinte de celui-ci.

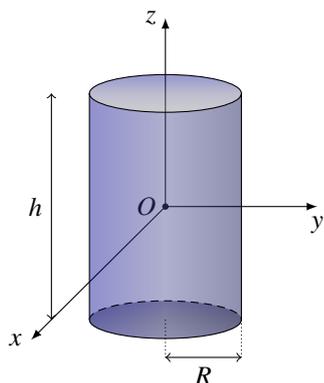
Définition 20. Soit Δ une droite orientée par \vec{e}_Δ , soit P un point de cette droite, on définit le **moment d’inertie vis-à-vis de la droite Δ** par :

$$I_\Delta = \vec{e}_\Delta \cdot \vec{I}_P(\vec{e}_\Delta).$$

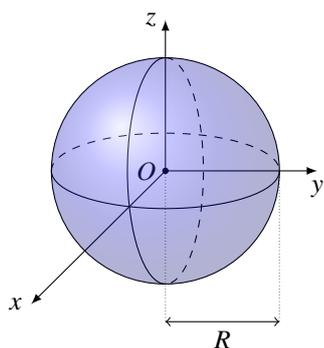
Ce moment d’inertie est un scalaire (en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$).



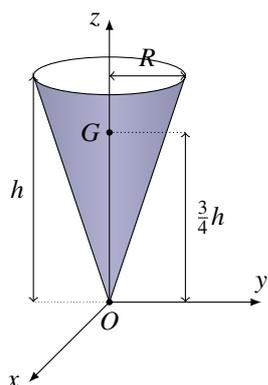
$$I_o = m \begin{pmatrix} \frac{1}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$



$$I_o = m \begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}R^2 \end{pmatrix}$$



$$I_o = m \begin{pmatrix} \frac{2}{5}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}R^2 \end{pmatrix}$$



$$I_G = m \begin{pmatrix} \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{80}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{80}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}R^2 \end{pmatrix}$$

TABLE 1. Moments d'inertie de solides pleins homogènes courants. Le pavé, le cylindre et la boule sont l'objet de l'exercice 18. Le cône plein est calculé explicitement dans l'exemple 6.

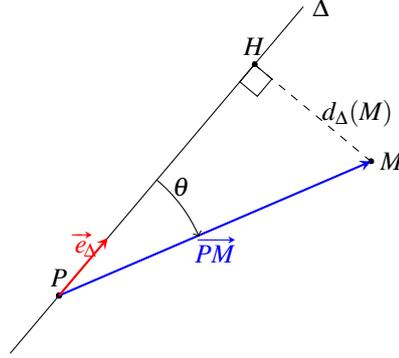


FIGURE 16. Représentation de la distance $d_{\Delta}(M)$ d'un point M à une droite Δ employée dans la représentation intégrale du moment d'inertie I_{Δ} vis-à-vis de la droite Δ .

Propriété 22. La définition de I_{Δ} est indépendante de l'orientation de \vec{e}_{Δ} et du point P de Δ .

Démonstration. L'indépendance vis-à-vis de l'orientation vient de la linéarité de I comme :

$$(-\vec{e}_{\Delta}) \cdot \vec{I}_P(-\vec{e}_{\Delta}) = (-\vec{e}_{\Delta}) \cdot (-\vec{I}_P(\vec{e}_{\Delta})) = \vec{e}_{\Delta} \cdot \vec{I}_P(\vec{e}_{\Delta}).$$

Soit P' un autre point de Δ , on regarde alors la définition de l'opérateur d'inertie et on note que

$$\vec{e}_{\Delta} \cdot (\overrightarrow{P'M} \wedge (\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'M})) = (\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'M}) \cdot (\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'M}) = \|\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'M}\|^2 = \|\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{PM}\|^2,$$

en employant la propriété du produit mixte et le fait que $\overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PM}$ avec $\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'P} = \vec{0}$ vu que P et P' appartiennent à Δ . \square

Remarque 36. Cette démonstration nous permet par ailleurs d'obtenir une représentation intégrale alternative de I_{Δ} . En effet, si on note H la projection orthogonale de M sur Δ , que l'on note θ l'angle que forment \vec{e}_{Δ} et \overrightarrow{PM} , cf. Fig. 16, on a :

$$\|\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{PM}\|^2 = \|\vec{e}_{\Delta}\|^2 \|\overrightarrow{PM}\|^2 \sin^2 \theta = \|\overrightarrow{PM}\|^2 \sin^2 \theta = \|\overrightarrow{HM}\|^2 = (d_{\Delta}(M))^2,$$

où $d_{\Delta}(M)$ est la distance du point M vis-à-vis de l'axe Δ . En tenant compte de ce résultat on peut écrire I_{Δ} comme suit :

$$I_{\Delta} = \iiint_{M \in V} \rho(M) (d_{\Delta}(M))^2 dV.$$

Remarque 37. Notons que les éléments sur la diagonale de la matrice I_A s'obtiennent comme :

$$I_{A,xx} = \vec{e}_x \cdot \vec{I}_A(\vec{e}_x) = I_{(A, \vec{e}_x)}, \quad I_{A,yy} = \vec{e}_y \cdot \vec{I}_A(\vec{e}_y) = I_{(A, \vec{e}_y)}, \quad I_{A,zz} = \vec{e}_z \cdot \vec{I}_A(\vec{e}_z) = I_{(A, \vec{e}_z)},$$

c'est-à-dire que ce sont les moments d'inertie vis-à-vis des droites passant par le point A et orientées suivant les trois vecteurs de base, ce qui est manifeste, par exemple, dans l'expression intégrale de I_O avec :

$$I_{O,xx} = \iiint_{M \in V} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

où l'on somme les distances des points M à l'axe Ox : $(d_{Ox}(M))^2 = y^2 + z^2$.

Théorème 3 (de Huygens). Soit Δ une droite passant par le barycentre G du solide, soit Δ' une droite parallèle à Δ , alors :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + md^2,$$

où d est la distance entre Δ et Δ' , cf. Fig. 17.

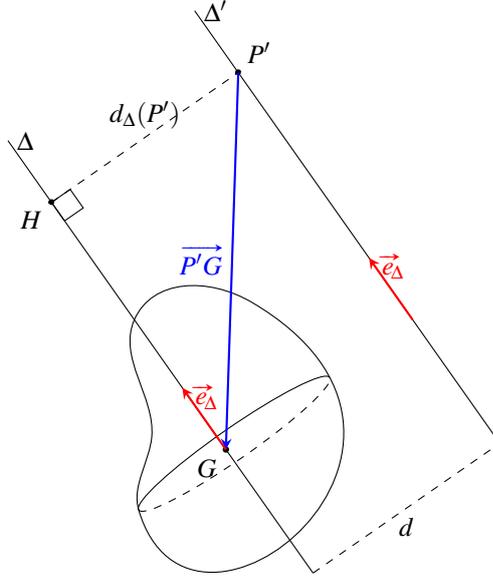


FIGURE 17. Situation géométrique dans laquelle se place le théorème de Huygens.

Démonstration. Soit P' un point de Δ' , on emploie alors la loi de transport, Prop. 21, avec

$$\begin{aligned} I_{\Delta'} &= \vec{e}_{\Delta} \cdot \vec{I}_{P'}(\vec{e}_{\Delta}) = \vec{e}_{\Delta} \cdot \vec{I}_G(\vec{e}_{\Delta}) + m \vec{e}_{\Delta} \cdot (\overrightarrow{P'G} \wedge (\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'G})) \\ &= I_{\Delta} + m \|\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{P'G}\|^2 = I_{\Delta} + m(d_{\Delta}(P'))^2 = I_{\Delta} + md^2, \end{aligned}$$

où la distance de P' à Δ est la distance entre Δ et Δ' . \square

d. Simplifications dues aux symétries de la distribution ρ

Précédemment nous avons défini le barycentre ainsi que la matrice d'inertie associés à la distribution ρ . On a des formules explicites permettant de les calculer, nous pourrions en rester là. Or, au fil des années, on a appris que lorsqu'il y a une symétrie (sphérique, vis-à-vis d'un plan, ...) ces différents calculs souvent se simplifient. C'est le cas ici aussi, tenir compte des symétries du système accélère le calcul, voire nous en dispense totalement. La subtilité étant qu'il ne s'agit pas (nécessairement) de symétries géométriques mais de symétries de la distribution de masse ρ .

Définition 21. Une **symétrie** \mathfrak{S} de la distribution ρ est une application de l'espace dans lui-même telle que :

$$\begin{aligned} \forall A \in \text{Solide} : \mathfrak{S}(A) &= B \in \text{Solide}, \\ \forall A \in \text{Solide} : \rho(\mathfrak{S}(A)) &= \rho(B) = \rho(A). \end{aligned}$$

Exemple 4. On a les symétries usuelles, cf. Fig. 18, suivantes :

- symétrie identité $\mathfrak{S}(A) = A$,
- symétrie par rapport à un plan Π , $\mathfrak{S} : A \mapsto B : \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}$, avec H la projection orthogonale de A sur Π ,

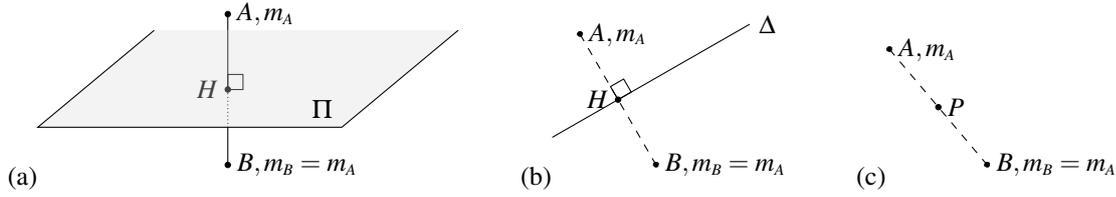


FIGURE 18. Représentation des symétries usuelles de l'exemple 4 avec une symétrie par rapport à un plan Π en (a), par rapport à une droite Δ en (b) et relativement à un point P en (c).

- symétrie par rapport à un axe Δ , $\mathfrak{S} : A \mapsto B : \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}$, avec H la projection orthogonale de A sur Δ ,
- symétrie par rapport à un point P , $\mathfrak{S} : A \mapsto B : \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PA}$.

Propriété 23. Si ρ est symétrique alors le barycentre G vérifie les propriétés suivantes :

- G appartient au plan Π si ρ est symétrique par rapport à Π ,
- G appartient à la droite Δ si ρ est symétrique par rapport à Δ ,
- G est confondu avec le point P si ρ est symétrique par rapport à P .

Démonstration. Pour la symétrie planaire choisissons le système de coordonnées de telle sorte que Π soit confondu avec le plan Oxy . La symétrie planaire s'encode alors comme

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : A(x_A, y_A, z_A) &\mapsto B(x_B, y_B, z_B) = B(x_A, y_A, -z_A), \\ \rho(\mathfrak{S}(x, y, z)) &= \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z). \end{aligned}$$

Alors :

$$m z_G = \iiint_{M(x,y,z) \in V} z \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{(x,y) \in \Omega} \left(\int_{-z_+(x,y)}^{z_+(x,y)} z \rho(x, y, z) \, dz \right) dx dy$$

avec Ω la projection de V sur le plan Oxy et où les bornes sur z , pour (x, y) fixés dans Ω , sont nécessairement symétriques vis-à-vis de z vu la symétrie planaire. Notons à présent que la symétrie planaire \mathfrak{S} impose à ρ d'être paire par rapport à z . L'intégrale intérieure est alors l'intégrale du produit d'une fonction impaire avec une fonction paire, donc d'une fonction impaire, vis-à-vis d'un segment symétrique par rapport à zéro, donc l'intégrale est nulle. Ainsi, on a $z_G = 0$ et le barycentre G appartient au plan Oxy , c'est-à-dire au plan Π .

Pour ce qui est de la symétrie axiale on peut, par exemple, choisir le système de coordonnées de telle sorte que l'axe Oz soit confondu avec l'axe Δ . La symétrie s'encode alors comme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : A(x_A, y_A, z_A) &\mapsto B(x_B, y_B, z_B) = B(-x_A, -y_A, z_A) \\ \rho(\mathfrak{S}(x, y, z)) &= \rho(-x, -y, z) = \rho(x, y, z). \end{aligned}$$

et il en résulte que ρ est paire vis-à-vis du couple (x, y) . En suivant un raisonnement similaire à celui pour la symétrie planaire on a rapidement :

$$x_G \propto \iint_{\Omega_z} x \rho(x, y, z) \, dx dy = 0, \quad \mathfrak{S}(\Omega_z) = \Omega_z,$$

ainsi que $y_G = 0$, c'est-à-dire que le barycentre G appartient à l'axe Oz , donc à la droite Δ . Notons qu'on peut effectuer le même raisonnement en coordonnées cylindriques où alors $\mathfrak{S} : A(\rho, \varphi, z) \mapsto B(\rho, \varphi + \pi \text{ mod } 2\pi, z)$.

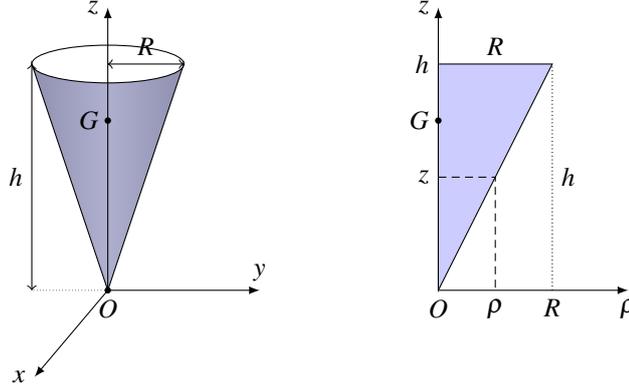


FIGURE 19. Cône plein homogène de l'exemple 6 en perspective à gauche, en coupe à droite. Avec deux triangles rectangles en situation de Thalès on établit que l'équation $Rz = h\rho$ est vérifiée, ce qui permet d'exprimer ρ en fonction de z ou, réciproquement, z en fonction de ρ . Le barycentre G appartient à l'axe de symétrie du cône et est situé à la hauteur $z_G = \frac{3}{4}h$.

Enfin, pour ce qui est de la symétrie par rapport à un point on choisit ce point comme étant l'origine O et alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : A(x_A, y_A, z_A) &\mapsto B(x_B, y_B, z_B) = B(-x_A, -y_A, -z_A) \\ \varrho(\mathfrak{S}(x, y, z)) &= \varrho(-x, -y, -z) = \varrho(x, y, z). \end{aligned}$$

Le même raisonnement sur la parité aboutit à $x_G = y_G = z_G = 0$, c'est-à-dire que le barycentre G est confondu avec l'origine, donc avec le point vis-à-vis duquel la distribution ϱ est symétrique. \square

Exemple 5. Dans le cas d'une distribution ϱ homogène (i.e. $\varrho = C^e$) pour les solides usuel (pavé, cylindre, boule) le barycentre est confondu avec le "centre" géométrique du solide. C'est un résultat évident en tenant compte des symétries de ces solides et la propriété que l'on vient d'établir.

Pour ce qui est de l'opérateur d'inertie la présence de la symétrie axiale est aussi très simplifiante.

Propriété 24. Soit Δ un axe de symétrie de la distribution ϱ , soit P un point de Δ , alors Δ est un axe propre de la matrice d'inertie I_P .

Démonstration. On peut, sans perte de généralité, choisir l'axe de symétrie comme étant l'axe Oz et pour point de l'axe l'origine O . Démontrer cette propriété revient alors à établir que $I_{xz} = I_{yz} = 0$. On reprend alors l'argument de la démonstration de la propriété 23 :

$$I_{xy} = - \iiint_V xz \varrho(x, y, z) dV = - \int_{z_-}^{z_+} \left(z \iint_{\Omega_z} x \varrho(x, y, z) dx dy \right) dz = 0, \quad \mathfrak{S}(\Omega_z) = \Omega_z,$$

en intégrant par tranches et en tenant compte du fait que Ω_z est laissé invariant par la symétrie axiale \mathfrak{S} alors que $\mathfrak{S} : x \mapsto -x$. En suivant la même logique on a aussi $I_{yz} = 0$. \square

C'est-à-dire que s'il y a une symétrie axiale on peut se dispenser d'au moins une étape de diagonalisation de la matrice d'inertie. Dans le cas où il y a trois symétries axiales concourantes en un point la matrice d'inertie relativement à ce point est automatiquement diagonalisée, ce qui est précisément le cas pour le pavé homogène, le cylindre homogène et la boule homogène de la table 1. A noter que la réciproque à la propriété 24 est fautive : ce n'est pas parce qu'un axe est un axe propre que celui-ci est un axe de

symétrie. Le cône homogène illustre cela, cf. Tab. 1, où (G, \vec{e}_x) est un axe propre du cône sans être un axe de symétrie (alors que (G, \vec{e}_z) est un axe de symétrie *donc* un axe propre).

e. Un exemple complet : le cône plein homogène

Exemple 6. Cherchons à déterminer la position du barycentre d'un cône plein homogène de hauteur h et base circulaire de rayon R , cf. Fig. 19. Vu la symétrie de la distribution ρ le barycentre appartient au segment liant le sommet du cône au centre de sa base, reste à déterminer où il se situe sur celui-ci. Afin d'avoir les calculs les plus simples possibles on choisit le système de coordonnées de telle sorte que le sommet du cône soit confondu avec l'origine et que l'axe de symétrie soit confondu avec Oz , avec la base en $z = h$ alors. On passe alors en coordonnées cylindriques, adaptées à ce type de symétrie.

La première quantité à calculer est la masse totale du cône :

$$m = \iiint_{M \in V} \rho \, dV = \rho \iiint_{M \in V} dV = \rho V,$$

étant donné que la distribution est homogène. Il s'agit alors de calculer le volume du cône :

$$V = \iiint_{M \in V} dV = \int_{z=0}^{z=h} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=Rz/h} \rho \, d\rho \, d\varphi \right) dz = 2\pi \times \frac{1}{2} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \int_{z=0}^{z=h} z^2 \, dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

On peut à présent calculer z_G avec :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{m} \iiint_{M \in V} z \, \rho \, dV = \frac{\rho}{m} \int_{z=0}^{z=h} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=Rz/h} \rho \, d\rho \, d\varphi \right) z \, dz = \frac{1}{V} \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \int_{z=0}^{z=h} z^3 \, dz \\ &= \frac{1}{V} \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{1}{4} h^4 = \frac{\frac{1}{4} \pi R^2 h^2}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{3}{4} h. \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées que l'on s'est choisi le barycentre G est situé en $G(0, 0, \frac{3}{4}h)$.

Calculons à présent la matrice d'inertie du cône plein vis-à-vis de O puis, ensuite, la matrice I_G transportée au barycentre G que l'on vient de déterminer. En vertu de la symétrie vis-à-vis de l'axe Oz il est déjà acquis que les intégrales portant sur xz et yz s'annulent. On a donc,

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint_{M \in V} (x^2 + y^2) \, \rho \, dV = \rho \int_{z=0}^{z=h} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=Rz/h} \rho^3 \, d\rho \, d\varphi \right) dz = 2\pi \rho \frac{1}{4} \left(\frac{R}{h} \right)^4 \int_{z=0}^{z=h} z^4 \, dz \\ &= \frac{\pi}{2} \rho \frac{1}{5} R^4 h = m \frac{\frac{1}{10} \pi R^4 h}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = \frac{3}{10} m R^2. \end{aligned}$$

On notera que

$$\iiint_{M \in V} x^2 \, \rho \, dV = \rho \int_{z=0}^{z=h} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=Rz/h} \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi \right) dz = \frac{m}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} \times \frac{1}{2} 2\pi \times \frac{1}{4} \frac{R^4}{h^4} \times \frac{1}{5} h^5 = \frac{3}{20} m R^2,$$

avec le même résultat pour l'intégrale de y^2 , ce qui en additionnant les deux donne (bien) I_{zz} . Pour ce qui de l'intégrale de z^2 on a :

$$\iiint_{M \in V} z^2 \, \rho \, dV = \rho \int_{z=0}^{z=h} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=Rz/h} \rho \, d\rho \, d\varphi \right) z^2 \, dz = \frac{m}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} \times 2\pi \times \frac{1}{2} \frac{R^2}{h^2} \times \frac{1}{5} h^5 = \frac{3}{5} m h^2.$$

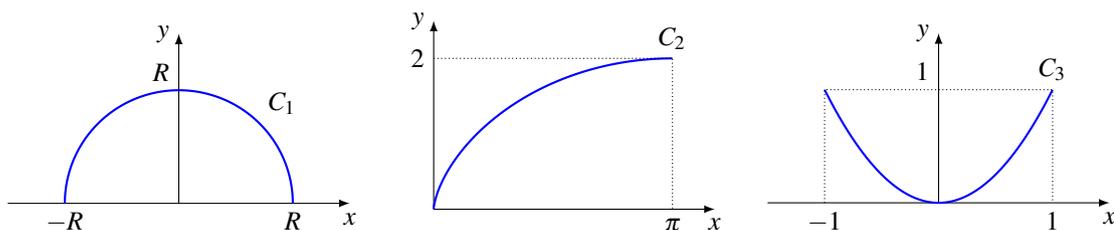


FIGURE 20. Les différentes distributions linéiques de masses de l'exercice 16.

Enfin, comme $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi = 0$ on a $I_{xy} = 0$ directement. En résumant toutes ces intégrales constituent la matrice d'inertie vis-à-vis de l'origine O :

$$I_O = m \begin{pmatrix} \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{5}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{5}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}R^2 \end{pmatrix}$$

Maintenant, comme $\vec{OG} = \frac{3}{4}h \vec{e}_z$, on a aussi :

$$I_O = I_G + m \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}h\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}h\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'obtenir l'opérateur d'inertie, dans cette base, relativement au barycentre G :

$$I_G = m \begin{pmatrix} \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{80}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{80}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}R^2 \end{pmatrix}.$$

Exercices

16 Barycentre de distributions linéiques planes. On suppose une distribution linéique de masse λ constante, déterminer la position du barycentre de cette distribution pour les cas suivants, représentés en Fig. 20.

(1) $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0, z = 0\}$;

(2) C_2 est la portion de cycloïde donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t), \\ y(t) = R(1 - \cos t), \\ z(t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

(3) $C_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2, -1 \leq x \leq 1, z = 0\}$.

17 Barycentre de distributions surfaciques planes. On suppose une distribution surfacique de masse σ constante, déterminer la position du barycentre de cette distribution pour les cas suivants, cf. Fig. 21.

(1) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0, z = 0\}$, le demi-disque.

(2) $S_2 = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\mid \rho \leq R(1 + \cos \varphi)\}$, la surface de la cardioïde en polaires.

18 Moments d'inertie usuels. Obtenir les moments d'inertie vis-à-vis de O des solides pleins homogènes suivants, cf. Tab. 1 :

(1) parallélépipède rectangle (pavé) : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{b}{2}, |z| \leq \frac{c}{2}\}$;

(2) cylindre : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq \frac{h}{2}\}$;

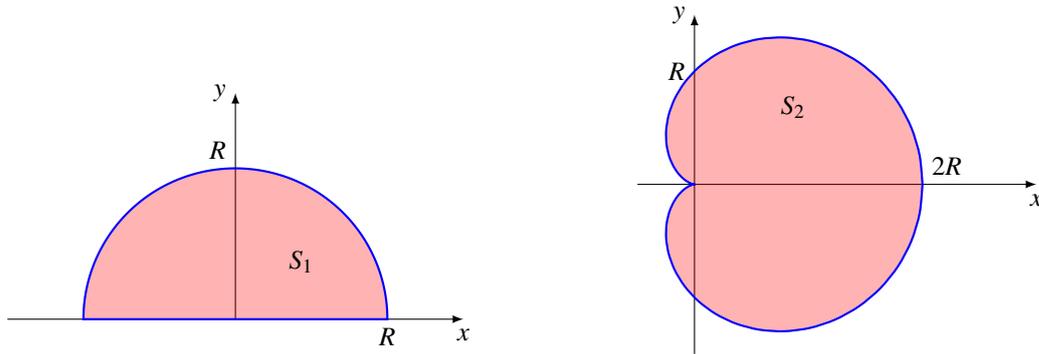
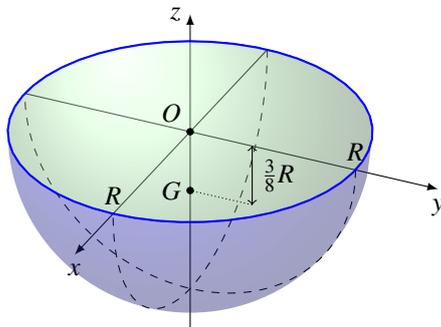


FIGURE 21. Les différentes distributions surfaciques, homogènes, de l'exercice 17.



$$I_G = m \begin{pmatrix} \frac{83}{320}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83}{320}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}R^2 \end{pmatrix}$$

TABLE 2. Moments d'inertie de l'hémisphère (inférieur) homogène plein de l'exercice 19.

(3) boule : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

En déduire, pour les cas intéressants, les moments des mêmes solides évidés.

19 Hémisphère plein. En suivant exactement les mêmes étapes que pour le cône plein et homogène de l'exemple 6 déterminer le barycentre et la matrice d'inertie relativement à G de l'hémisphère plein et homogène inférieure : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq 0\}$.

5. CINÉTIQUE

La distribution de masse ρ propre au solide nous a permis de faire apparaître les différents moments de cette distribution que sont son barycentre et les éléments de l'opérateur d'inertie. La mise en mouvement de cette distribution de masse, qui est l'objet de la cinétique, permet de faire poindre le sens physique de ces quantités où l'on notera l'importance cruciale que revêt le barycentre.

a. Définition des quantités cinétiques

Définition 22. L'ensemble des points d'un système affectés d'une masse et d'un vecteur vitesse, chacun, forme un système de vecteurs liés $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i \vec{v}_i)\}_{i=1,2,\dots} = \{(M, \rho(M) \vec{v}_M)\}_{M \in V}$ dont les éléments de réduction sont :

- la **quantité de mouvement**, ou l'**impulsion**, totale : $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \iiint_{M \in V} \varrho(M) \vec{v}_M dV$,
- le **moment cinétique** : $\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge (m_i \vec{v}_i) = \iiint_{M \in V} \overrightarrow{AM} \wedge (\varrho(M) \vec{v}_M) dV$.

qui constituent un torseur : le **torseur cinétique** \mathcal{C}

$$\mathcal{C} = \{\vec{p}, \vec{L}_A\}.$$

On définit en plus, en amont, l'**énergie cinétique** :

$$\mathcal{E}_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2 = \iiint_{M \in V} \frac{1}{2} \varrho(M) \|\vec{v}_M\|^2 dV.$$

Ces définitions sont la généralisation directe des quantités vues en mécanique du point en sommant sur l'ensemble des points constituant le système. L'objet principal de cette section sera d'obtenir des expressions plus "pratiques", voire intuitives, de ces quantités cinétiques.

Propriété 25. *L'énergie cinétique d'un solide admet l'écriture torsorielle suivante :*

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mathcal{V} \cdot \mathcal{C}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un jeu sur l'écriture du carré de la norme de la vitesse :

$$\|\vec{v}_M\|^2 = \vec{v}_M \cdot \vec{v}_M = \vec{v}_M \cdot (\vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}) = \vec{v}_P \cdot \vec{v}_M + \vec{\omega} \cdot (\overrightarrow{PM} \wedge \vec{v}_M).$$

Ainsi, en sommant sur les points M contre la distribution $\varrho(M)$ on a :

$$2\mathcal{E}_c = \vec{v}_P \cdot \iiint_{M \in V} \varrho(M) \vec{v}_M dV + \vec{\omega} \cdot \iiint_{M \in V} \overrightarrow{PM} \wedge (\varrho(M) \vec{v}_M) dV = \vec{v}_P \cdot \vec{p} + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_P = \mathcal{V} \cdot \mathcal{C}. \quad \square$$

b. Référentiel barycentrique et théorèmes de König

Remarquons, pour commencer, que la seule définition du barycentre associé à un système simplifie l'expression des quantités cinétiques.

Propriété 26. *Les quantités cinétiques se simplifient en :*

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m_{\text{tot}} \vec{v}_G, \\ \vec{L}_A &= \overrightarrow{AG} \wedge (m_{\text{tot}} \vec{v}_G) + \vec{L}_G, \\ \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} m_{\text{tot}} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour ce qui est de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i = \frac{d}{dt} m_{\text{tot}} \overrightarrow{OG} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G.$$

Quant à l'expression du moment cinétique il s'agit de la loi de transport d'un moment en employant l'expression de la résultante $\vec{p} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G$ établi juste avant. L'énergie cinétique est obtenue en évaluant son expression torsorielle en G et en employant la résultante cinétique : $2\mathcal{E}_c = \mathcal{V} \cdot \mathcal{C} = \vec{v}_G \cdot \vec{p} + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G = \vec{v}_G \cdot (m_{\text{tot}} \vec{v}_G) + \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G. \quad \square$

Il en résulte que la quantité de mouvement du système est celle du barycentre affecté de la masse totale m_{tot} . C'est-à-dire que, dans ce cas, le système est ramené à un unique point : le barycentre. Mais on peut simplifier plus encore en calculant ces quantités dans le référentiel barycentrique.

Définition 23. Soit \mathcal{R}_L le référentiel du laboratoire relativement auquel on étudie le solide :

$$\mathcal{R}_L = \{O, \mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}, H\},$$

soit G le barycentre du système, on définit le **référentiel barycentrique**, vis-à-vis de \mathcal{R}_L , comme étant :

$$\mathcal{R}^* = \{G, \mathcal{B}' = \{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\}, H\},$$

ayant choisi de synchroniser les horloges et surtout avec \mathcal{R}^* en translation dans \mathcal{R}_L (en particulier $\vec{\omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_L} = \vec{0}$). Les quantités exprimées dans \mathcal{R}^* sont conventionnellement étoilées : \vec{p}^* , $\vec{\omega}^*$, ...

Remarque 38. On notera que les deux référentiels sont en translation mais que rien n'est dit quant à cette translation. En particulier il n'y a pas de raison pour que celle-ci soit uniforme et, généralement, le référentiel barycentrique ne sera pas galiléen.

Dans le référentiel barycentrique le solide a, nécessairement, un mouvement extrêmement simple.

Propriété 27. Dans \mathcal{R}^* :

- le solide est animé d'un mouvement de rotation (pure) autour d'un axe passant par le barycentre, le torseur cinématique du solide se réduit à un glisseur $\mathcal{V}^* = \{\vec{\omega}^* = \vec{\omega}_{/\mathcal{R}_L}, \vec{v}_G^* = \vec{0}\}$;
- la quantité de mouvement du système est nulle $\vec{p}^* = \vec{0}$, le torseur cinétique se réduit à un couple : $\mathcal{C}^* = \{\vec{p}^* = \vec{0}, \vec{L}^* = \vec{C}^{te}\}$;
- la vitesse angulaire $\vec{\omega}^*$ coïncide avec celle dans \mathcal{R}_L : $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\vec{v}_G^* = \dot{\vec{G}} = \dot{\vec{0}} = \vec{0}$, donc le champ antisymétrique des vitesses s'annule en ce point ce qui fait que le solide est en rotation vis-à-vis d'une droite passant par G , i.e. que \mathcal{V}^* est (au moins) un glisseur. Mais ce n'est pas tout, en employant la loi de composition des vitesses angulaires on a :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{/\mathcal{R}_L} = \vec{\omega}^* + \vec{\omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_L} = \vec{\omega}^*,$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires dans les deux référentiels coïncident car ils sont en translation.

Pour ce qui est du torseur cinétique on a simplement $\vec{p}^* = m_{\text{tot}} \vec{v}_G^* = \vec{0}$ et, vu que \vec{p}^* est la résultante de \mathcal{C}^* , il en résulte que le torseur est un couple et (en particulier) que \vec{L}^* est une constante vectorielle. \square

Définition 24. La valeur \vec{L}^* du moment cinétique dans le référentiel barycentrique, indépendante du point d'évaluation, est nommée le **moment cinétique propre** (ou interne) du solide.

On peut aller substantiellement plus loin en identifiant les (valeurs des) moments cinétiques et des énergies cinétique dans les différents référentiels.

Propriété 28. On a :

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \vec{L}_G^* = \vec{L}^*, \\ \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}^* = \mathcal{E}_c^*. \end{aligned}$$

Démonstration. On rappelle qu'avec la formule de composition des vitesses dans le cas où les deux référentiels sont en translation entre eux, on a : $\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_e = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$, ainsi en appliquant la définition du moment cinétique au barycentre dans \mathcal{R}_L :

$$\vec{L}_G = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge (m_i \vec{v}_i) = \sum_i (m_i \overrightarrow{GM}_i) \wedge (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G) = \vec{L}_G^* + \left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \right) \wedge \vec{v}_G = \vec{L}_G^* = \vec{L}^*,$$

où la somme entre parenthèse s'annule en vertu des propriétés du barycentre (Prop. 17). Pour ce qui est de la partie énergie cinétique on a :

$$2\mathcal{E}_c^* = \mathcal{V}^* \cdot \mathcal{C}^* = \{\vec{\omega}^* = \vec{\omega}, \vec{v}_G^* = \vec{0}\} \cdot \{\vec{p}^* = \vec{0}, \vec{L}^* = \vec{C}^{te}\} = \vec{\omega} \cdot \vec{L}^* = \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G. \quad \square$$

Théorème 4 (de König). *Entre \mathcal{R}_L et \mathcal{R}^* le moment cinétique et l'énergie cinétique du solide se simplifient en :*

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \vec{AG} \wedge (m_{\text{tot}} \vec{v}_G) + \vec{L}^*, \\ \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} m_{\text{tot}} \|\vec{v}_G\|^2 + \mathcal{E}_c^*. \end{aligned}$$

Démonstration. Il s'agit de la somme des propriétés établies précédemment. \square

Le théorème de König simplifie l'expression des quantités cinétique et, en sus, leur attribue une signification physique "naturelle" : l'énergie cinétique se découpe en celle d'un mouvement de translation du barycentre affecté de la masse totale m_{tot} et en celle d'un mouvement de rotation propre du solide sur lui-même dans le référentiel barycentrique. Il en va de même pour le moment cinétique découpé en celui d'une translation et en celui d'une rotation propre.

Remarque 39. On a aussi un théorème de König sur la résultante cinétique :

$$\vec{p} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G + \vec{p}^* = m_{\text{tot}} \vec{v}_G,$$

mais qui n'a que peu d'intérêt vu que $\vec{p}^* = \vec{0}$.

c. Moment cinétique et moments d'inertie

Les théorèmes précédents permettent de simplifier les expressions des différentes quantités cinétiques. Néanmoins, même après ces simplifications, on a par exemple *a priori* à calculer des intégrales telles que :

$$\vec{L}^* = \vec{L}_G^* = \iiint_{M \in V} (\vec{GM} \wedge \vec{v}_M^*) \varrho(M) dV,$$

ce qui de prime abord semble pénible. Notons que, comme le mouvement du solide dans le référentiel barycentrique est un mouvement de pure rotation autour d'un axe passant par G , on a :

$$\vec{v}_M^* = \vec{v}_G^* + \vec{\omega}^* \wedge \vec{GM} = \vec{\omega} \wedge \vec{GM},$$

comme $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}$. Alors en reportant cela dans l'expression du moment cinétique propre évalué au barycentre on a :

$$\vec{L}^* = \vec{L}_G^* = \iiint_{M \in V} \vec{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GM}) \varrho(M) dV = \vec{I}_G(\vec{\omega}),$$

c'est-à-dire que le moment cinétique (propre) est obtenu en appliquant le tenseur d'inertie (en G) sur le vecteur vitesse angulaire. On en déduit immédiatement les expressions simplifiées du moment cinétique et de l'énergie cinétique.

Propriété 29. *Un solide de masse m et de matrice d'inertie I_G relativement à son barycentre G dont le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\Delta$ est dirigé par \vec{e}_Δ a pour moment cinétique et énergie cinétique :*

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \vec{AG} \wedge (m \vec{v}_G) + \vec{I}_G(\vec{\omega}), \\ \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \|\vec{\omega}\|^2, \end{aligned}$$

où $I_\Delta = \vec{e}_\Delta \cdot \vec{I}_G(\vec{e}_\Delta)$ est le moment d'inertie du solide vis-à-vis de la droite Δ passant par G et dirigée par \vec{e}_Δ .

Démonstration. On emploie le théorème de König puis la remarque précédente sur \vec{L}^* faisant apparaître $\vec{I}_G(\vec{\omega})$. Quant à l'énergie cinétique on a $2\mathcal{E}_c^* = \vec{\omega} \cdot \vec{L}^* = \vec{\omega} \cdot \vec{I}_G(\vec{\omega}) = \omega^2 \vec{e}_\Delta \cdot \vec{I}_G(\vec{e}_\Delta) = \|\vec{\omega}\|^2 I_\Delta$, en employant la linéarité de I_G pour sortir un ω . \square

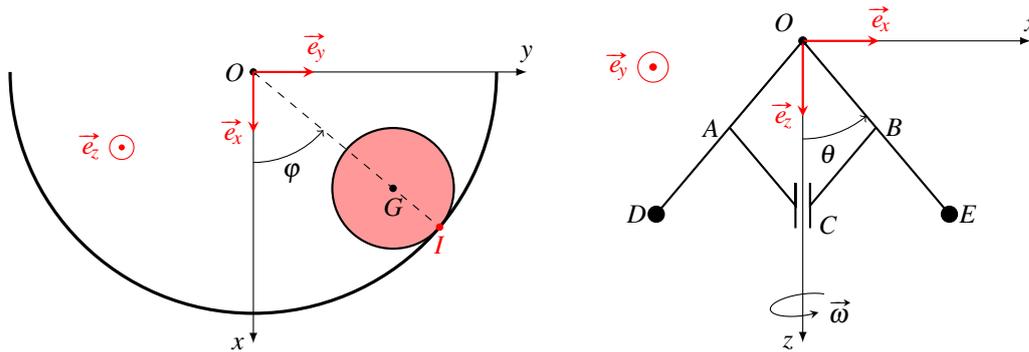


FIGURE 22. Disque homogène roulant, sans glisser, dans un profil cylindrique de l'exercice 20 et le régulateur de Watt de l'exercice 21.

On notera là une propriété extrêmement satisfaisante et saine dans l'expression de \vec{L}^* où l'intégrale se reformule en :

- une partie spécifique à la distribution de masse du solide donnée par la matrice d'inertie I_G et
- une partie spécifique au mouvement de rotation propre du solide dans le référentiel barycentrique donnée par le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

La matrice d'inertie est calculée une seule fois puis renseignée dans une table (cf. Tab. 1 et Tab. 2), il n'y a plus à considérer l'expression intégrale, seulement à appliquer l'opérateur sur le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du solide.

On notera de plus, sur l'expression de l'énergie cinétique du système, l'interprétation physique des moments d'inertie qui sont au mouvement de rotation propre ce que la masse est au mouvement de translation.

Exercices

20. Un disque homogène D de masse m , de rayon r et de centre G roule sans glisser dans un profil cylindrique de rayon R . Le mouvement de D est supposé plan, cf. Fig. 22. On note φ l'angle que fait \vec{OG} avec \vec{e}_x . On note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ le vecteur de rotation du disque.

- (1) Exprimer $\vec{\omega}$ en fonction de r , R et de $\dot{\varphi}$.
- (2) Obtenir l'énergie cinétique du disque D .

21 *Régulateur de Watt.* Quatre tiges OD , OE , AC et BC , de masses négligeables, sont articulées en O , A , B et C . Le point O est fixe, le point C représente un manchon de masse m coulissant (sans frottements) sur l'axe Oz . En D et E se trouvent deux masses ponctuelles m . On note θ l'angle que fait OE avec l'axe Oz . On a $OA = AD = AC = OB = BC = BE = \ell$, cf. Fig. 22.

Déterminer l'impulsion, le moment cinétique et l'énergie cinétique du système en rotation à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$ autour de l'axe Oz en fonction de θ et des données du problème.

22. Un solide est formé par deux boules homogènes, de mêmes rayons R et de mêmes masses M , qui sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur ℓ et de masse m . Ce solide est en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Δ perpendiculaire à la tige et passant en son milieu, cf. Fig. 23.

Déterminer l'énergie cinétique du solide dans le référentiel du laboratoire (fixe).

23. On considère une toupie constituée par un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R . Le sommet O de cette toupie est fixe dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . L'axe Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante $\dot{\psi}$ dans le plan Oxy . Dans \mathcal{R}' la toupie tourne autour de l'axe Oz' avec une vitesse angulaire constante $\dot{\phi}$, l'axe Oz' formant un angle θ avec Oz , cf. Fig. 23.

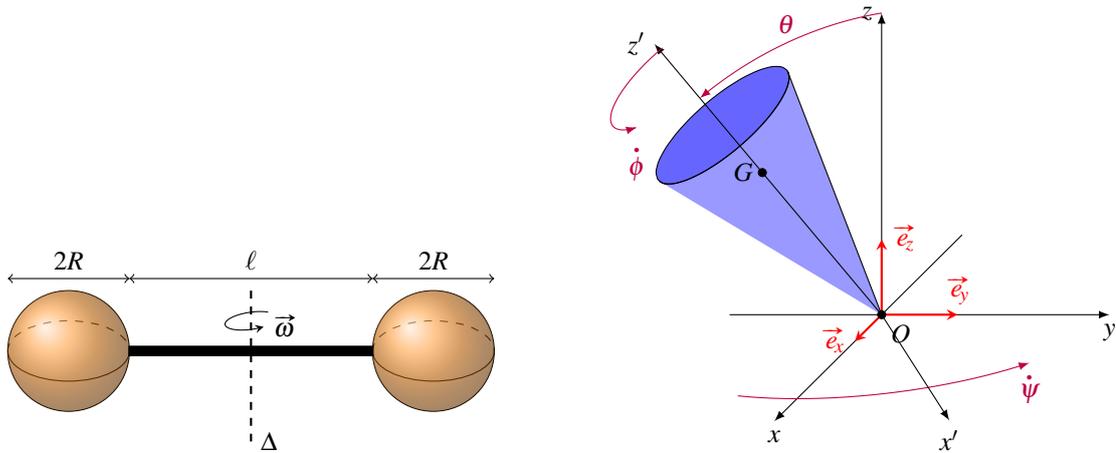


FIGURE 23. Rotation d'un haltère constitué de deux boules reliées par une tige de l'exercice 22 et la rotation d'une toupie assimilée à un cône de l'exercice 23.

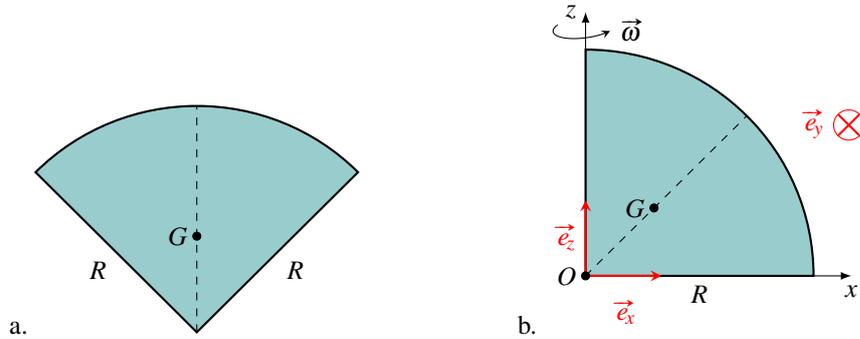


FIGURE 24. Quart de disque en rotation de l'exercice 24.

- (1) Calculer les vecteurs vitesse angulaire et accélération angulaire de la toupie.
- (2) Calculer la vitesse et l'accélération du centre d'inertie G de la toupie.

24 *Étude cinétique d'un quart de disque en rotation.* On considère un quart de disque homogène de masse m de rayon R . Ce quart de disque tourne autour de l'un de ses côtés avec une vitesse angulaire ω , cf. Fig. 24.

- (1) Déterminer la position du barycentre G en tenant compte des symétries de la plaque.
- (2) Calculer la résultante cinétique et le moment cinétique en O .
- (3) Après avoir calculé l'énergie cinétique vérifier que l'on a bien $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \vec{L}_O \cdot \vec{\omega}$.

6. DYNAMIQUE

Au fil des sections précédentes on a pu décrire le mouvement d'un ou de solides en tenant compte de contraintes cinématique et de comment sa distribution de masse est répartie dans l'espace. On peut à présent intégrer les "causes" de ce mouvement, c'est-à-dire les forces interagissant avec le système puis voir comment cela affecte la dynamique de celui-ci.

a. Définition du torseur dynamique

Définition 25. On définit le **torseur dynamique** \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = \{\vec{D}, \vec{\delta}_A\},$$

par les éléments de réduction du système de vecteurs liés $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i \vec{a}_i)\}_{i=1,2,\dots} = \{(M, \varrho(M) \vec{a}_M)\}_{M \in V}$, avec :

- la **résultante dynamique** : $\vec{D} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \iiint_{M \in V} \varrho(M) \vec{a}_M dV$,
- le **moment dynamique** : $\vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_i = \iiint_{M \in V} \overrightarrow{AM} \wedge (\varrho(M) \vec{a}_M) dV$.

Similairement au cas de la cinétique on s'attend à ce que l'existence du barycentre simplifie les expressions dynamiques. Ce n'est que partiellement le cas.

Propriété 30. Pour G le barycentre du système, les éléments de réduction de \mathcal{D} se simplifient en :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= m_{\text{tot}} \vec{a}_G, \\ \vec{\delta}_A &= \vec{\delta}_G + m_{\text{tot}} \vec{a}_G \wedge \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

Démonstration. En effet, pour ce qui est de la résultante dynamique on a :

$$\vec{D} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} m_{\text{tot}} \vec{v}_G = m_{\text{tot}} \vec{a}_G,$$

et pour ce qui est du moment dynamique il s'agit de la loi de transport avec la simplification de la résultante que l'on vient d'établir. \square

Propriété 31. Le torseur dynamique n'est pas obtenu en dérivant le torseur cinétique :

$$\mathcal{D} \neq \dot{\mathcal{C}},$$

en particulier les deux champs de moments vérifient l'équation :

$$\vec{\delta}_A = \dot{\vec{L}}_A + m_{\text{tot}} \vec{v}_A \wedge \vec{v}_G.$$

Démonstration. Clairement la résultante dynamique est la dérivée de la résultante cinétique : $\vec{D} = \dot{\vec{p}}$, la difficulté porte sur les moments. Dérivons \vec{L}_A :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_A &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{v}_i = \sum_i m_i \dot{\overrightarrow{AM}}_i \wedge \vec{v}_i + \sum_i m_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \dot{\vec{v}}_i = \sum_i (-\vec{v}_A) \wedge (m_i \vec{v}_i) + \vec{\delta}_A \\ &= -\vec{v}_A \wedge (\sum_i m_i \vec{v}_i) + \vec{\delta}_A = -\vec{v}_A \wedge \vec{p} + \vec{\delta}_A = -m_{\text{tot}} \vec{v}_A \wedge \vec{v}_G + \vec{\delta}_A, \end{aligned}$$

où on utilise le fait que $\dot{\overrightarrow{AM}}_i = \dot{\overrightarrow{OM}}_i - \dot{\overrightarrow{OA}} = \vec{v}_i - \vec{v}_A$, que $\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{0}$ et la simplification de la résultante cinétique $\vec{p} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G$. \square

Afin d'obtenir des équations différentielles de la dynamique *simples* il serait souhaitable que \mathcal{D} soit la dérivée (par rapport au temps) de \mathcal{C} , or ce n'est pas le cas. Néanmoins la démonstration établit qu'il y a trois cas remarquables où les champs de moments coïncident :

- (1) au barycentre G ,
- (2) si A est un point fixe : $\vec{v}_A = \vec{0}$,
- (3) si \vec{v}_A et \vec{v}_G sont colinéaires (i.e. $\vec{v}_A \wedge \vec{v}_G = \vec{0}$).

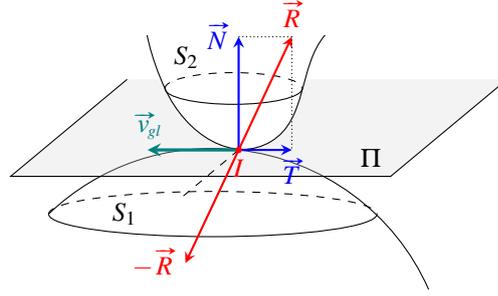


FIGURE 25. Deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel au point I . La vitesse de glissement $\vec{v}_{gl} = \vec{v}_{I \in S_2} - \vec{v}_{I \in S_1}$ appartient au plan Π tangent aux deux solides en I . La réaction \vec{R} du premier solide sur le second se décompose en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} de telle sorte que $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. Notons qu'il y a une réaction opposée $-\vec{R}$ du second solide sur le premier. Les deux réactions \vec{R} et $-\vec{R}$ se compensent et ont une projection \vec{T} sur Π correspondant aux frottements entre ces deux solides.

Pour se simplifier la vie on cherchera à se ramener à ces cas remarquables et en particulier au premier en considérant préférentiellement le barycentre G . Justement, au barycentre G on notera que :

$$\vec{\delta}_G = \dot{\vec{L}}_G = \dot{\vec{L}}_G^* = \vec{I}_G(\dot{\vec{\omega}}).$$

b. Interactions du solide

Définition 26. Au système de vecteurs liés des forces agissant sur leur **point d'application** et à ses éléments de réduction on associe le **torseur des forces** \mathcal{F} , ou torseur d'actions :

$$\mathcal{F} = \{ \vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i, \vec{\mathcal{M}}_A = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i \}.$$

Ces forces peuvent être dues à la gravitation ou la pesanteur, à l'action d'un champ électromagnétique et (en particulier) aux forces de contact entre deux solides.

§Actions des forces de contact, lois de Coulomb. Pour modéliser les forces de contact entre deux solides S_1 et S_2 on a des réactions des solides les uns sur les autres. Vis-à-vis du plan tangent Π commun aux deux solides au point d'incidence I , auquel appartient l'éventuelle vitesse de glissement \vec{v}_{gl} , on décompose la réaction \vec{R} en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} , cf. Fig. 25.

Le problème, comme on le verra, est l'indétermination des composantes \vec{N} et \vec{T} . Dans certains cas on peut lier celles-ci, c'est l'objet des lois du frottement.

Proposition 5 (Lois du frottement de Coulomb). Ce sont des lois empiriques qui portent sur \vec{N} et \vec{T} et dépendent du cas où il y a glissement entre les deux solides ou non (cas "statique").

— Il y a glissement entre les deux solides ($\vec{v}_{gl} \neq \vec{0}$) :

$$\begin{cases} \|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|, \\ \vec{T} \wedge \vec{v}_{gl} = \vec{0}, \\ \vec{T} \cdot \vec{v}_{gl} < 0. \end{cases}$$

où la composante tangentielle est d'autant plus forte que la réaction normale l'est avec f le **coefficient de frottement dynamique** et où la composante tangentielle est opposée à la vitesse de glissement \vec{v}_{gl} .

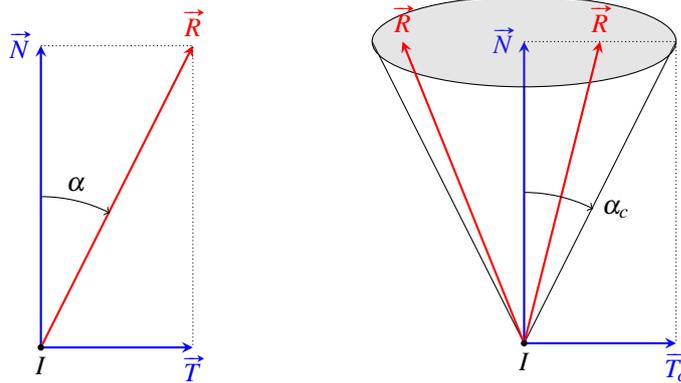


FIGURE 26. Dans le cadre des lois de Coulomb les composantes tangentielle et normales de la réaction en un point I sont liées entre elles. On a, de plus, le fait que cette réaction \vec{R} appartient à un cône dont le demi-angle au centre est limité par $\tan \alpha_c = f$.

— Il n’y a pas de glissement ($\vec{v}_{gl} = \vec{0}$) :

$$\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|,$$

où f_s est le **coefficient de frottement statique** et, par contre, il n’y a pas de vitesse de glissement pour orienter la composante tangentielle \vec{T} .

Remarque 40. Le coefficient de frottement, statique ou dynamique, dépend de la nature des matériaux en contact (e.g. Fer/Bois $\approx 0,5$, ...).

Dans le cas statique, vu que \vec{N} et \vec{T} sont perpendiculaires, on peut faire apparaître un angle :

$$\tan \alpha = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} \leq f_s,$$

où la réaction $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ appartient au **cône de frottement**, cf. Fig. 26, dont l’axe est la normale \vec{N} et le demi-angle au centre est limité

$$\alpha \leq \arctan f_s = \alpha_c.$$

Dans le cas où cette inégalité est violée, \vec{R} sortant du cône, le solide sort du cas statique et se met à glisser.

Remarque 41. Dans le cas statique il n’y a pas d’orientation de la composante tangentielle \vec{T} . Dans les exercices on peut employer la méthode suivante. On suppose d’abord que $\vec{T} = \vec{0}$ (i.e. qu’il n’y a pas de frottements) et on regarde le mouvement qu’aurait le solide dans ce cas. Afin de *résister à la mise en mouvement* on oriente \vec{T} contre ce mouvement (virtuel).

c. Les principes de la mécanique classique appliqués au solide

On rappelle que la mécanique classique newtonienne s’inscrit dans le cadre de la relativité galiléenne et s’appuie sur trois principes.

Principe d’inertie : dans un référentiel galiléen le centre d’inertie d’un système mécanique isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen le centre d’inertie vérifie l’équation :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m_{\text{tot}} \vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Principe de l'action et de la réaction : pour deux systèmes en interaction, quelque soit le référentiel :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1},$$

où le support des forces est dirigé par la droite passant par M_1 et M_2 où s'appliquent les deux forces.

Remarque 42. On notera que ces principes s'applique au centre d'inertie, c'est-à-dire au barycentre.

Proposition 6. Dans un référentiel galiléen les principes se récapitulent en l'équation :

$$\mathcal{F}^{ext} = \mathcal{D}.$$

Démonstration. En sommant le PFD point à point dans un référentiel galiléen :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{tot}, \\ \vec{\delta}_A &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{\mathcal{M}}_A. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que les efforts internes s'annulent en vertu du principe de l'action et de la réaction. Pour ce faire considérons deux points M_1 et M_2 du système interagissants entre eux. Pour ce qui est de la résultante on a simplement : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$, et vis-à-vis du moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AM}_1 \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{AM}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{AM}_1 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{AM}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0},$$

où toutes les forces internes s'annulent deux à deux et, dans la somme, seules subsistent les forces externes au système. \square

On décompose ce principe sur les éléments de réduction de \mathcal{D} en employant le résultat sur le moment cinétique.

Théorème 5 (de la résultante dynamique). Dans un référentiel galiléen, sur un solide de barycentre G :

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}.$$

Théorème 6 (du moment cinétique). Dans un référentiel galiléen, sur un solide de barycentre G :

- au barycentre (mobile) G : $\dot{\vec{L}}_G = \vec{\mathcal{M}}_G^{ext}$,
- en un point fixe P : $\dot{\vec{L}}_P = \vec{\mathcal{M}}_P^{ext}$,
- en un point arbitraire : $\dot{\vec{L}}_A = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext} - m \vec{v}_A \wedge \vec{v}_G$.

Les principes sont faciles à énoncer, la difficulté réside dans leur mise en oeuvre. Dans la fin de cette section on étudie en détails des exemples complets afin de mettre en place les “bonnes habitudes” de résolution de tels problèmes, cf. “Algorithme de résolution” en fin de polycopié p. 58.

d. Un exemple complet : glissement ou basculement d'un pavé

Exemple 7. On considère un pavé posé sur le sol horizontal. Sur celui-ci on tire avec une force \vec{F} horizontale à une hauteur h du sol au point H , cf. Fig. 27. La situation est statique et la question que l'on se pose est, en fonction de $\|\vec{F}\|$ et de h , dans quel cas le pavé se met à glisser sur le sol ou bascule par rapport à l'une de ses arêtes ?

Cinématique et contraintes. Il n'y a pas de réelle cinématique à étudier vu que la situation est statique. Dans la coupe du pavé par le plan Oxz les points du pavé sont :

$$M(x, z) : 0 \leq x \leq 2a, 0 \leq z \leq 2b,$$

et son barycentre G est situé en $G(a, b)$.

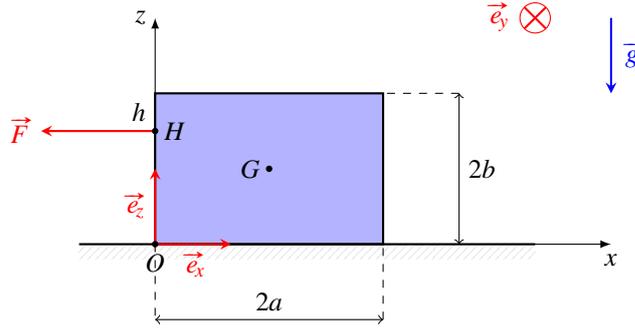


FIGURE 27. Étude du glissement et du basculement d'un pavé sur lequel on tire avec une force \vec{F} .

Cinétique. Les éléments cinétiques du pavé sont rappelés en Tab. 1 et, vu la géométrie du problème, on aurait $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_y$.

Dynamique. Sur le solide on recense plusieurs forces :

- son poids \vec{P} dû à l'accélération locale de la pesanteur,
- une réaction du support \vec{R} ,
- la force de tirage \vec{F} s'appliquant au point H de coordonnées $H(0, h)$.

Parmi ces forces il n'est pas clair où s'appliquent \vec{P} et \vec{R} .

Concernant le poids on reconstitue celui ci en additionnant les poids infinitésimaux $d\vec{P}$ s'appliquant sur la masse élémentaire dm , on a :

$$\vec{P} = \iiint_{M \in V} d\vec{P}(M) = \iiint_{M \in V} \rho(M) \vec{g} dV = \vec{g} \iiint_{M \in V} \rho(M) dV = m \vec{g},$$

ce qui donne la résultante du torseur des forces. Pour ce qui est du moment du torseur des forces on a :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \iiint_{M \in V} d\vec{\mathcal{M}}_A = \iiint_{M \in V} \vec{AM} \wedge (\rho(M) \vec{g}) dV = \left(\iiint_{M \in V} \rho(M) \vec{AM} dV \right) \wedge \vec{g} = m \vec{AG} \wedge \vec{g} = \vec{AG} \wedge \vec{P}.$$

Il en résulte que le torseur des forces de pesanteur s'identifie avec :

$$\mathcal{F}_{\text{pes}} = \{ \vec{P} = m \vec{g}, \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AG} \wedge (m \vec{g}) \},$$

c'est-à-dire que celui-ci se confond avec le torseur de la force de pesanteur s'appliquant au barycentre G .

Concernant la réaction du support on peut l'appliquer en un point $I(x_I, 0)$ appartenant à l'interface entre le sol et le pavé.

On étudie la staticité du système et pour ce faire il est nécessaire que son torseur de (toute les) forces externes \mathcal{F}^{ext} soit le torseur nul. Concernant la partie résultante du torseur on a :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = (T - F) \vec{e}_x + (N - mg) \vec{e}_z,$$

en décomposant la réaction en une composante normale et une composante tangentielle, ce qui donne simplement $T = F$ et $N = mg$. Notons que si la résultante est nulle le torseur est un couple et qu'alors il suffit de montrer que le moment s'annule en un point pour qu'il s'annule en tous points, et donc que le torseur est le torseur nul. On a trois points remarquables : G , H et I , si on calcule le moment vis-à-vis I , par exemple, on annule la contribution de la réaction :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_I^{\text{ext}} &= \vec{IG} \wedge \vec{P} + \vec{IH} \wedge \vec{F} + \vec{II} \wedge \vec{R} \\ &= [(a - x_I) \vec{e}_x + b \vec{e}_z] \wedge (-mg \vec{e}_z) + (-x_I \vec{e}_x + h \vec{e}_z) \wedge (-F \vec{e}_x) = [mg(a - x_I) - hF] \vec{e}_y \end{aligned}$$

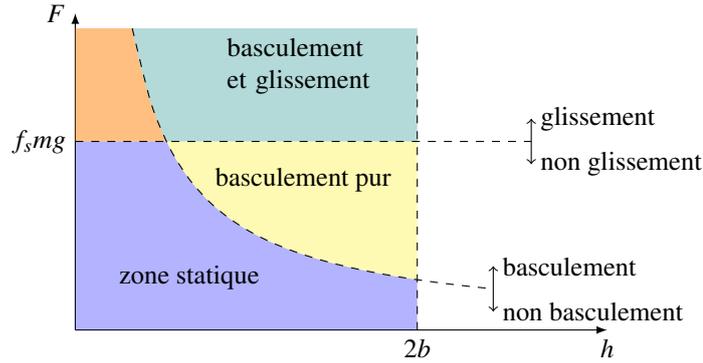


FIGURE 28. Espace des états du pavé en fonction de l'intensité F de la force de tirage et de la hauteur h où elle s'applique. Cet espace est séparé en quatre régions où le pavé peut être statique (en bleu), glisser (en orange), basculer (en jaune) et glisser et basculer simultanément (en vert-turquoise).

ce qui permet d'obtenir l'abscisse du point d'application de la réaction :

$$x_I = a - \frac{hF}{mg}.$$

Notons que ce point d'application doit appartenir au solide : $0 \leq x_I \leq 2a$, ce qui borne la force de tirage entre le cas où le système est statique et celui où le solide bascule :

$$F \leq \left(\frac{a}{h}\right) mg.$$

En appliquant la loi de frottement statique $T = F \leq N = mg$ on obtient une nouvelle inégalité à vérifier séparant le cas statique du cas où il y a glissement :

$$F \leq f_s mg.$$

En fonction de comment ces deux inégalités sont satisfaites ou non le pavé peut être mis en mouvement par un basculement, par un glissement, ou rester statique, cf. Fig. 28.

e. Un exemple complet : analyse détaillée de la machine d'Atwood

Exemple 8. On considère un cylindre de masse M et de rayon R pouvant tourner autour de son axe (fixe) identifié avec l'axe Oz , cf. Fig. 29. Un fil *inextensible de masse négligeable* s'enroulant sans glisser autour du cylindre permet à deux masses d'y être suspendues et de mettre en rotation le cylindre. Les deux solides de masses m_1 et m_2 ont pour barycentres G_1 et G_2 , respectivement. En ayant tenu compte des contraintes géométriques les seules variables libres sont x_1 et x_2 .

Dans ce système composé on fait intervenir un nouvel élément : un fil. Celui-ci possède deux caractéristiques qui se traduisent par deux équations concrètes.

- (1) Il est *inextensible*, c'est-à-dire que pour deux points A et B le long d'une section rectiligne on a $\|\vec{AB}\| = C^{te}$, c'est-à-dire que le long de ses sections droites inextensibles le fil se comporte comme un solide et on a : $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$.
- (2) Il est *de masse négligeable*, alors sur une section $d\ell$ du fil on a $\sum \vec{F}^{ext} = (dm) \vec{a}_G = \vec{0}$, c'est-à-dire que toutes les forces qui s'y appliquent se compensent et qu'alors *les fils transmettent les tensions*.

Cinématique et contraintes. Le fait que le fil soit inextensible implique que :

$$\ell = x_1 + x_2 + \pi R = C^{te},$$

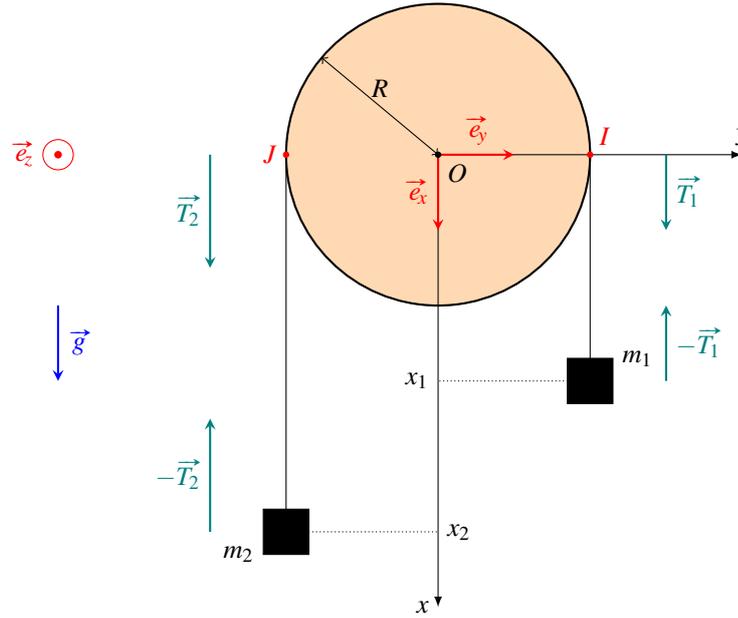


FIGURE 29. Schéma de la machine d'Atwood où deux masses sont suspendues, via un fil inextensible de masse nulle, à un cylindre tournant autour de son axe de symétrie.

ce qui lie les deux variables x_1 et x_2 , avec en particulier $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$. On a de plus les deux points remarquables I et J où il y a interaction "sans glissement" du fil avec le cylindre. En tenant compte, encore, de l'inextensibilité du fil on a :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \dot{x}_1 \vec{e}_x = \vec{v}_{I \in \text{fil}} = \vec{v}_{I \in \text{cylindre}}, \\ \vec{v}_2 &= \dot{x}_2 \vec{e}_x = -\dot{x}_1 \vec{e}_x = \vec{v}_{J \in \text{fil}} = \vec{v}_{J \in \text{cylindre}}.\end{aligned}$$

Mais les points I et J sont des points du cylindre qui est un solide tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ ainsi :

$$\vec{v}_{J \in \text{cylindre}} = \vec{v}_{J \in \text{cylindre}} + \vec{\omega} \wedge \vec{JI} = \vec{v}_{J \in \text{cylindre}} + \omega \vec{e}_z \wedge (2R \vec{e}_y) = \vec{v}_{J \in \text{cylindre}} - 2R\omega \vec{e}_x.$$

Avec les expressions \vec{v}_i et \vec{v}_j établies précédemment et après simplification on en tire l'équation de liaison :

$$\dot{x}_1 = -R\omega.$$

Cinétique. Parmi les éléments qui composent le système le seul intéressant cinétiquement est le cylindre pour lequel on a :

$$\vec{L}_{O=G} = \vec{L}_G^* = \vec{I}_G(\vec{\omega}) = I\vec{\omega} = I\omega \vec{e}_z, \quad I = \frac{1}{2}mR^2.$$

Dynamique. Dans le système il y a plusieurs forces agissant en différents points :

- les poids :
 - $M\vec{g}$ en O ,
 - $m_1\vec{g}$ en G_1 ,
 - $m_2\vec{g}$ en G_2 ,
- une réaction \vec{R} de l'axe du cylindre en O , sans frottements,
- une tension \vec{T}_1 en I et une contre-tension $-\vec{T}_1$ en G_1 ,
- une tension \vec{T}_2 en J et une contre-tension $-\vec{T}_2$ en G_2 .

On applique le théorème de la résultante dynamique à chacun des sous-éléments du système :

$$\begin{aligned} \text{masse } m_1 : \quad & m_1 \vec{a}_{G_1} = m_1 \ddot{x}_1 \vec{e}_x = m_1 g \vec{e}_x - T_1 \vec{e}_x, \\ \text{masse } m_2 : \quad & m_2 \vec{a}_{G_2} = m_2 \ddot{x}_2 \vec{e}_x = m_2 g \vec{e}_x - T_2 \vec{e}_x, \\ \text{le cylindre :} \quad & M \vec{a}_O = \vec{0} = M \vec{g} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2, \end{aligned}$$

où la dernière équation nous permet d'obtenir la réaction \vec{R} si on souhaite la déterminer. Enfin on peut appliquer le théorème du moment cinétique au barycentre du cylindre : $\vec{\delta}_G = \vec{L}_G = I \dot{\omega} \vec{e}_z = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}}$, où il nous faut calculer le moment des forces extérieures *au cylindre* vis-à-vis de G :

$$\vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GG} \wedge M \vec{g} + \overrightarrow{GG} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{GI} \wedge \vec{T}_1 + \overrightarrow{GJ} \wedge \vec{T}_2 = R(T_2 - T_1) \vec{e}_z.$$

On peut alors effectuer la synthèse de équations de la dynamique et des contraintes pour obtenir les équations à résoudre :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\dot{x}_1, \\ \dot{x}_1 = -R\omega, \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T_2, \\ I \dot{\omega} = R(T_2 - T_1). \end{cases}$$

La variable dynamique qui nous intéresse est $x_1(t)$, les tensions T_1 et T_2 sont des inconnues. En effectuant une combinaison linéaire des équations afin de faire disparaître les tensions T_1 et T_2 du membre de droite on obtient l'équation différentielle :

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R} \right) \ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g,$$

où l'on voit sur le membre de droite les cas particuliers $m_1 > m_2$ où c'est la première masse qui descend emportant la seconde, $m_1 = m_2$ où les deux masses sont à l'équilibre et $m_1 < m_2$ où c'est la seconde masse qui emporte la première. On peut, par exemple, en tirer les tensions transmises par les fils :

$$T_1 = m_1 g \left(\frac{2m_2 + \frac{I}{R}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R}} \right).$$

Exercices

25 *Mise en mouvement d'un pavé.* Une pavé homogène de masse m est posé sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale, cf. Fig. 30. Ce solide subit l'action de son poids \vec{P} et la réaction du support \vec{R} , dont on supposera qu'elle vérifie les lois de Coulomb.

En augmentant progressivement la valeur de α , en commençant avec $\alpha = 0$, à partir de quel angle critique α_c le pavé sera-t-il mis en mouvement ?

26 *Une bille qui roule.* Une bille homogène de masse m et de rayon R est posée sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. La bille est lâchée sans vitesse à l'instant initial $t_0 = 0$. La position de son centre d'inertie G à cet instant est choisie comme origine O du système de coordonnées où Ox est suivant la courbe de plus grande pente, cf. Fig. 30.

En supposant que la bille roule sans glisser, obtenir l'accélération \ddot{x}_G de G le long de l'axe Ox .

27 *La chute d'un yo-yo.* Un yo-yo est constitué de deux cylindres fins identiques, de masses individuelles m et de rayon R séparés par un petit cylindre de masse négligeable et de rayon r (avec $r < R$). Un fil de masse nulle et inextensible est enroulé autour du petit cylindre intérieur, cf. Fig. 31.

À l'instant initial $t_0 = 0$ on lâche le yo-yo sans vitesse.

(1) Répertoire l'ensemble des forces agissant sur le yo-yo.

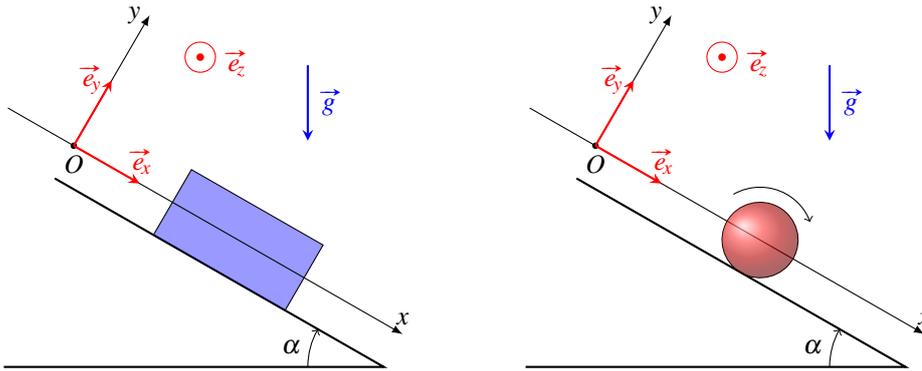


FIGURE 30. Pavé et bille sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale de l'exercice 25 et 26, respectivement.

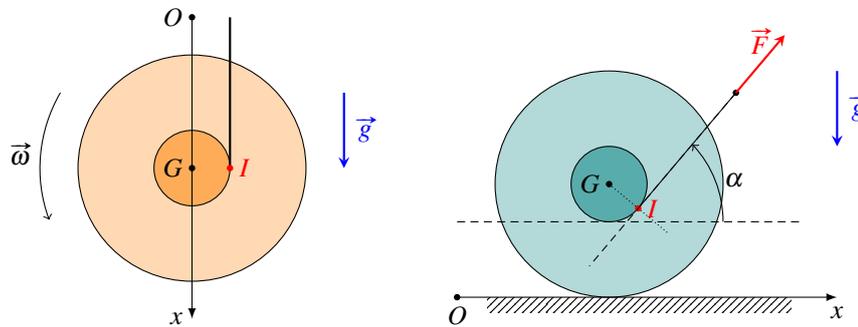


FIGURE 31. Deux yo-yo, le premier chutant en se déroulant de l'exercice 27 et l'autre, de l'exercice 28, en contact avec le sol et tiré par son fil.

- (2) Calculer l'accélération linéaire \ddot{x}_G du centre d'inertie G du yo-yo suivant l'axe vertical, orienté suivant \vec{g} , Ox .
- (3) Obtenir la tension \vec{T} du fil.

28 *Le tirage d'un yo-yo.* Un yo-yo, dont les caractéristiques sont strictement identiques à celles du yo-yo de l'exercice précédent, est posé sur le sol (plan et horizontal). On tire sur le fil avec une force \vec{F} formant un angle α avec l'horizontale, cf. Fig. 31. On suppose que le yo-yo roule sans glisser sur le sol.

Obtenir l'expression de \ddot{x}_G et en déduire qu'en fonction de l'angle α le yo-yo est susceptible de tourner dans un sens ou dans l'autre.

29 *Oscillations d'une masselotte.* Une masselotte de masse m est suspendue en B à un fil inextensible de masse négligeable attaché au sol en A et s'enroulant sans glisser autour d'une poulie. La poulie tourne autour de son centre C suspendu à un ressort de raideur k , cf. Fig. 32. La poulie de masse M et de rayon R a pour moment d'inertie $I_\Delta = MR^2/2$ autour de son axe de rotation (sans frottements).

Calculer les périodes d'oscillation de la masselotte.

30 *Roulement d'un cylindre dans un autre cylindre.* Un cylindre creux C_1 d'axe Δ , de rayon R , de moment d'inertie I_Δ par rapport à Δ est mobile (i.e. peut tourner) sans frottements autour de Δ . Un cylindre plein C_2 de rayon $R/2$, de masse m , roule sans glisser à l'intérieur du premier cylindre. On note I le contact ponctuel entre C_1 et C_2 .

On note $\mathcal{R} = (O_1, \mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\})$ le référentiel du laboratoire fixe et galiléen, l'axe Δ étant confondu avec O_1z . Au premier cylindre on associe un référentiel $\mathcal{R}_1 = (O_1, \{\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_z\})$ lié à C_1 , avec O_1 le

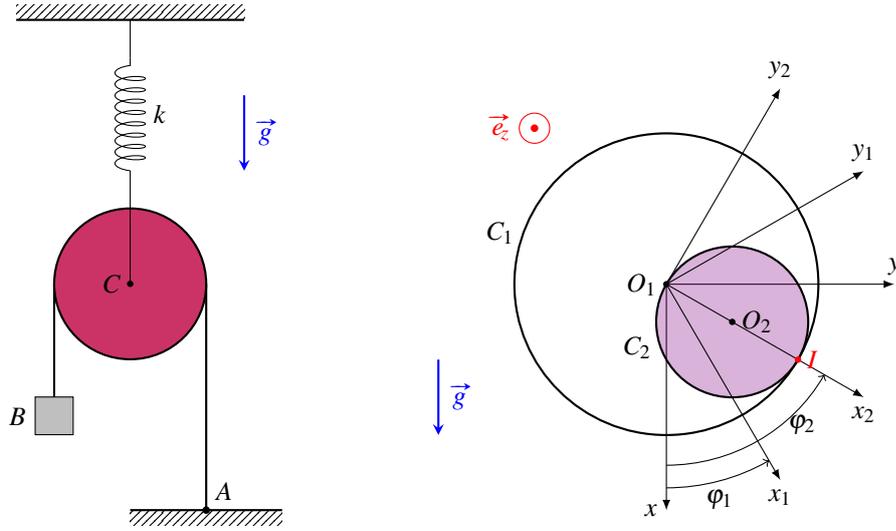


FIGURE 32. Oscillation d'une masselotte suspendue à une poulie de l'exercice 29 et roulement d'un cylindre dans un autre de l'exercice 30.

centre du cylindre C_1 . Pour étudier le mouvement du second cylindre on introduit le référentiel $\mathcal{R}_2 = (O_1, \{\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_z\})$, tel que O_1O_2 , le segment liant le centre du premier cylindre au centre du second cylindre, soit suivant O_1x_2 . Le cylindre C_2 subit l'action de son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$. Cette configuration ainsi que les notations associées sont illustrées en Fig. 32.

- (1) Déterminer le vecteur rotation instantanée du cylindre C_2 .
- (2) Écrire les équations différentielles de la dynamique vérifiées par ces deux solides.

7. TRAVAIL ET ÉNERGIE

On rappelle les notions de puissance, de travail et d'énergie (potentielle et mécanique) pour énoncer et re-démontrer les théorèmes de l'énergie cinétique et mécanique. Ceux-ci sont connus depuis le cours de mécanique du point et restent tout autant utiles dans le contexte de la mécanique du solide.

a. Puissance et travail

Définition 27. La **puissance** \mathcal{P} (en Watt) d'une force \vec{F} s'appliquant sur un point M est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_M.$$

Propriété 32. La puissance échangée par un système solide est :

$$\mathcal{P} = \vec{v}_p \cdot \vec{F}^{ext} + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_p^{ext} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{F}^{ext}.$$

Démonstration. En sommant sur l'ensemble des points M constituant le solide on recouvre la puissance échangée :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iiint_{M \in V} d\mathcal{P}_M = \iiint_{M \in V} \vec{v}_M \cdot d\vec{f}_M = \iiint_{M \in V} \left\{ \vec{v}_p \cdot d\vec{f}_M + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}) \cdot d\vec{f}_M \right\} \\ &= \vec{v}_p \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \iint_{M \in V} \overrightarrow{PM} \wedge d\vec{f}_M = \vec{v}_p \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_p = \mathcal{V} \cdot \mathcal{F}, \end{aligned}$$

pour P un point du solide et \vec{F} la somme des forces infinitésimales $d\vec{f}_M$. Dans cette dernière expression \mathcal{F} est le torseur de toutes les forces : externes et internes. Or, en vertu du principe d'action-réaction, les efforts internes se compensent et on obtient la formule annoncée. \square

Remarque 43. Dans la pratique c'est en sommant sur les quelques points (G, I, \dots) où s'appliquent les forces que l'on obtiendra la puissance \mathcal{P} .

Considérons comme cas particulier celui de deux solides en contact ponctuel en un point I avec :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{R} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2},$$

vu le principe d'action-réaction, cf. Fig. 25, alors la puissance due au contact est :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{I \in S_2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{I \in S_1} = \vec{R} \cdot (\vec{v}_{I \in S_1} - \vec{v}_{I \in S_2}) = \vec{T} \cdot \vec{v}_{gl1/2},$$

où l'on voit apparaître la vitesse de glissement des solides les uns sur les autres et où seule la composante tangentielle \vec{T} de la réaction mutuelle contribue au produit scalaire. Alors, il n'y a pas de puissance échangée due au contact quand :

- il n'y a pas de glissements : $\vec{v}_{gl} = \vec{0}$,
- il n'y a pas de frottements : $\vec{T} = \vec{0}$,

autrement il y a une dépense par glissement avec frottements.

b. Théorème de l'énergie cinétique

Rappelons dans un premier temps la notion de travail.

Définition 28. De la puissance \mathcal{P} on obtient le **travail** (en Joules) par intégration :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t) dt.$$

Alors, que ce soit en terme de puissance ou de travail, on peut à présent établir le théorème fort utile suivant.

Théorème 7 (de l'énergie cinétique). *L'énergie cinétique d'un système solide soumis à des forces externes vérifie les deux équations (équivalentes) suivantes :*

$$\dot{\mathcal{E}}_c = \mathcal{P}^{ext}, \quad \Delta \mathcal{E}_c = W^{ext}.$$

Démonstration. Considérons pour commencer l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\vec{v}_i\|^2 = \frac{1}{2} \mathcal{V} \cdot \mathcal{C}.$$

En dérivant \mathcal{E}_c on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_c &= \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i m_i (\vec{v}_p + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}_i) \cdot \vec{a}_i \\ &= \vec{v}_p \cdot \left(\sum_i m_i \vec{a}_i \right) + \vec{\omega} \cdot \left(\sum_i \overrightarrow{PM}_i \wedge (m_i \vec{a}_i) \right) = \vec{v}_p \cdot \vec{D} + \vec{\omega} \cdot \vec{\delta}_p \\ &= \mathcal{V} \cdot \mathcal{D} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{F}^{ext} = \mathcal{P}^{ext}, \end{aligned}$$

en employant la loi de transport sur le champ des vitesses et l'identité sur le produit mixte, puis en reconnaissant le produit torsorien entre \mathcal{V} et \mathcal{D} , ensuite en employant le principe de la dynamique et, enfin, en retrouvant l'expression obtenue précédemment de la puissance échangée. Ceci démontre la première identité, la seconde s'obtient en intégrant la première dans le temps pour obtenir le travail. \square

c. Théorème de l'énergie mécanique

On rappelle dans un premier temps comment on définit l'énergie potentielle puis l'énergie mécanique pour démontrer le théorème sur celle-ci.

Définition 29. Une force \vec{F} est une **force conservative** s'il existe une fonction **énergie potentielle**, notée \mathcal{E}_p , telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p.$$

L'énergie potentielle est définie à une constante additive près.

Pour qu'une force puisse dériver d'une telle énergie potentielle on "sait" que (1) la dépendance de \vec{F} en t doit uniquement être implicite et (2) au travers de $\vec{r}(t)$ ce qui ramène l'intégration du travail à la circulation de \vec{F} :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

alors il reste nécessaire (3) que \vec{F} soit irrotationnel (forme différentielle fermée) pour que, modulo des conditions topologiques, la fonction énergie potentielle \mathcal{E}_p existe. Dans ce cas on a :

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \cdot d\vec{r} = -\Delta \mathcal{E}_p. \quad (\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0})$$

Exemple 9. On a les différents exemples et contre-exemples suivants.

- (1) $\vec{F}(t) = q\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ qui est un terme de forçage dû à un champ électrique oscillant et qui n'est pas conservative ;
- (2) $\vec{F} = -\lambda \vec{v}(t)$ qui est une force de frottement fluide et n'est pas conservative ;
- (3) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ une réaction du support *avec frottements et glissements* qui s'applique en un point I qui, donc, *travaille* et n'est pas conservative vu que $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}_I = \vec{T} \cdot \vec{v}_I \neq 0$;
- (4) $\vec{F} = 2x(t)\vec{e}_x + x^3(t)\vec{e}_y$ qui n'est pas conservative vu qu'elle n'est pas irrotationnelle ;
- (5) la force de pesanteur : $\vec{P} = m\vec{g}$ qui s'applique au barycentre G , est conservative et dérive du potentiel $\mathcal{E}_p = -m\vec{g} \cdot \vec{r}_G$;
- (6) la force de rappel d'un ressort de constante de raideur k : $\vec{F}_{\text{rapp}} = -k\Delta\vec{\ell}$ où $\Delta\vec{\ell}$ est l'élongation linéaire (vectorielle) qui est conservative et dérive du potentiel $\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ avec ℓ la longueur effective du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide.

Remarque 44. Généralement par un choix judicieux de système de coordonnées prenant pour origine la position d'équilibre du système l'expression de la force de rappel d'un ressort, et donc de son énergie potentielle, se simplifie grandement ($\Delta\vec{\ell} \sim x\vec{e}_x$, $(\ell - \ell_0)^2 \sim x^2$).

Définition 30. On définit l'**énergie mécanique**, notée \mathcal{E}_m , d'un système par

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p,$$

où \mathcal{E}_c est son énergie cinétique et \mathcal{E}_p l'énergie potentielle de toutes les forces conservatives agissant sur lui, à une constante additive près.

Théorème 8 (de l'énergie mécanique). *L'énergie mécanique d'un système solide soumis à des forces externes vérifie les deux équations (équivalentes) suivantes :*

$$\dot{\mathcal{E}}_m = \mathcal{P}_{nc}^{ext}, \quad \Delta \mathcal{E}_m = W_{nc}^{ext},$$

où l'indice nc se rapporte aux forces non-conservatives.

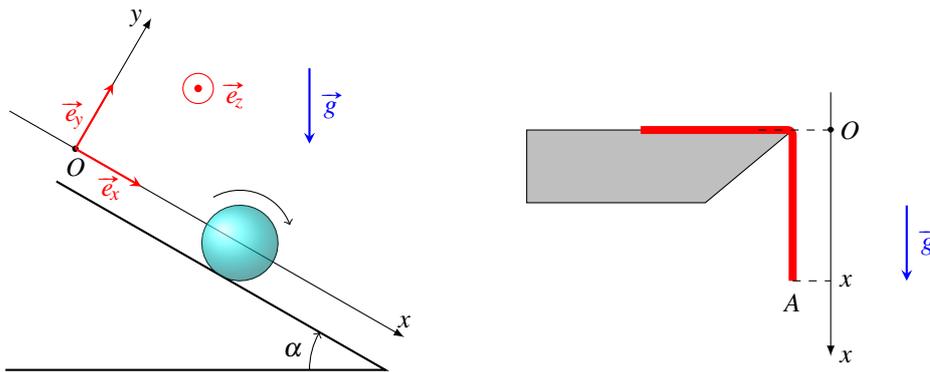


FIGURE 33. Bille dévalant une pente de l'exercice 31 et la chute d'une corde massive au bord d'une falaise de l'exercice 32.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de l'énergie cinétique et de la définition de l'énergie potentielle. En effet, en dérivant \mathcal{E}_m par rapport au temps on a :

$$\dot{\mathcal{E}}_m = \dot{\mathcal{E}}_c + \dot{\mathcal{E}}_p = \mathcal{P} + \overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) \cdot \dot{\vec{r}} = \mathcal{P} - \vec{F}_c \cdot \vec{v} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_c = \mathcal{P}_{nc},$$

où l'on a supprimé l'indice ext, employé le théorème de l'énergie cinétique et la dérivée des fonctions de plusieurs variables composées (faisant apparaître le gradient), ramené tous les points d'application en un \vec{r} générique, appliqué la définition des forces conservatives pour obtenir, finalement, la différence entre la puissance de toutes les forces et celle des forces conservatives, soit la puissance des forces non-conservatives. La deuxième identité du théorème s'obtient en intégrant la première. \square

Ce théorème a la conséquence particulièrement utile suivante.

Corollaire (au théorème de l'énergie mécanique). *L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives ou ne travaillant pas est conservée : $\Delta\mathcal{E}_m = 0$.*

Dans ce cas on dit que l'énergie mécanique est une **intégrale première du mouvement** et on intègre plus facilement les équations du mouvement sachant qu'alors $\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t_0 = 0)$ où, pour exploiter cette formule, il est nécessaire de connaître les conditions initiales du système à $t_0 = 0$.

Exercices

31 Une bille qui roule. Une bille homogène de masse m et de rayon R est posée sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. La bille est lâchée sans vitesse à l'instant initial $t_0 = 0$. La position de son centre d'inertie G à cet instant est choisie comme origine O du système de coordonnées où Ox est suivant la courbe de plus grande pente, cf. Fig. 33.

En supposant que la bille roule sans glisser, obtenir l'accélération \ddot{x}_G de G le long de l'axe Ox en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

32 La chute d'une corde. Une corde inextensible de longueur ℓ et de masse m homogène repose au bord d'une falaise avec l'une de ses extrémités, notée A , qui pend dans le vide. En l'absence de frottements cette corde va glisser vers sa chute, cf. Fig. 33. On repère par la coordonnée x le point A .

- (1) Calculer l'énergie cinétique de la corde.
- (2) Déterminer l'abscisse du centre d'inertie de la corde et en déduire son énergie potentielle.
- (3) Déterminer l'équation du mouvement du point A .

33 La chute d'une barre. Une barre homogène de masse m et de longueur ℓ chute sous son propre poids sur un sol glissant (sans frottements). Cette barre est modélisée par un segment $[AB]$. On note A l'extrémité

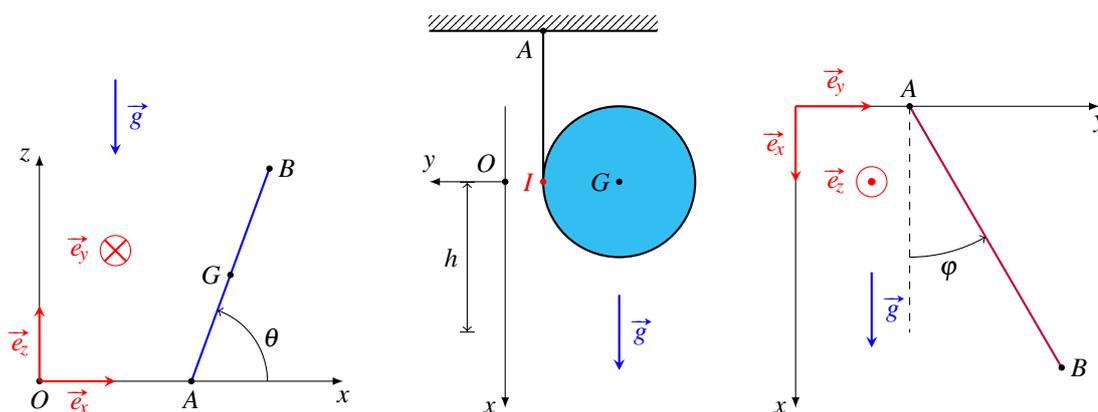


FIGURE 34. Successivement, la chute d'une barre sur un sol glissant de l'exercice 33, la chute d'une bobine déroulant son fil de l'exercice 34 et un pendule pesant dont l'attache est mobile de l'exercice 35.

de la barre en contact avec le sol (plan, horizontal et identifié à l'axe Ox). On note θ l'angle que font \vec{OA} et \vec{AB} , cf. Fig. 34.

- (1) Écrire les théorèmes de la dynamique :
 - (a) le théorème de la résultante dynamique ;
 - (b) le théorème du moment cinétique en G .
- (2) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous sa forme intégrée entre l'instant initial $t_0 = 0$ et l'instant t courant. Alors, en tenant compte des résultats précédents et des conditions initiales, obtenir une équation différentielle liant θ et $\dot{\theta}$.
- (3) Obtenir alors la vitesse $\|\vec{v}_G\|$ du barycentre G lorsque la barre touche le sol.

On prendra pour C.I. $\theta(t=0) \approx \pi/2$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$, $\dot{x}_A(t=0) = 0$ et on rappellera que $I_\Delta = m\ell^2/12$ pour un axe Δ passant par le milieu d'une barre perpendiculairement à celle-ci.

34 *La chute d'une bobine.* Une bobine, qu'on considérera comme un cylindre plein homogène, de masse m et de rayon R , initialement au repos, se déroule le long d'un câble vertical sous l'action de la pesanteur d'accélération locale \vec{g} . Le câble, de masse nulle et inextensible, est attaché au plafond en A qui est un point fixe dans le référentiel d'étude, cf. Fig. 34.

- (1) Relier la vitesse de rotation angulaire ω de la bobine avec la vitesse \dot{x}_G de son barycentre.
- (2) Montrer en utilisant le théorème de l'énergie cinétique que la vitesse du barycentre G est $v_G = \sqrt{4gh/3}$ après que la bobine soit tombée d'une hauteur h .
- (3) Obtenir l'accélération a_G de G .
- (4) Obtenir la tension T du câble.
- (5) Avec quelle force F faut-il tirer sur le câble pour que la bobine "tourne" sur elle-même sans "descendre" ?

35 *Pendule à point d'attache mobile.* Un pendule est constitué d'un point matériel B de masse M relié par un fil idéal de longueur ℓ à un point A de masse m . Le point A est astreint à se déplacer, sans frottements, sur l'axe horizontal Oy . Le point B oscille dans le plan Oxy . On note φ l'angle que forment \vec{AB} et \vec{g} , l'accélération locale de la pesanteur. La position de A est repérée par une coordonnée y_A , celle de B par φ , cf. Fig. 34. À l'instant initial $t_0 = 0$ le système est lâché sans vitesse avec $y_A(t=0) = 0$, $\varphi(t=0) = \varphi_0$.

- (1) Établir que le système possède deux intégrales premières du mouvement : son énergie mécanique \mathcal{E}_m et la projection de sa quantité de mouvement sur l'axe Oy .
- (2) En tirant partie de ces lois de conservation obtenir l'équation différentielle régissant la dynamique de ce système.
- (3) Obtenir la période des oscillations du système dans le cas des petits angles. Dans quelle limite, sur les masses, retrouve-t-on le pendule simple ?

On pourra poser $\lambda = \frac{M}{M+m}$ et $\mu = \frac{Mm}{M+m} = m\lambda$ pour simplifier certaines expressions.

SOLUTIONS DES EXERCICES

2. $\vec{\mathcal{M}}_O = -4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$, $\vec{\mathcal{M}}_M = (2z-4)\vec{e}_x + (z-2)\vec{e}_y + (5-2x-y)\vec{e}_z$, $\vec{\mathcal{M}}$ est un glisseur son axe Δ passe par A et est dirigé par \vec{a} .

3. $V_3 = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{\mathcal{M}} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_z$

4. (1) $\beta\omega = \alpha\gamma$, (2) $\alpha = \beta = \gamma = \omega$,
 $\vec{\mathcal{M}} = \alpha(\vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OB} \wedge \vec{OC})$.

5. Si $\vec{z} = \vec{z}'$ l'égalité est vérifiée en tous points de l'espace, autrement elle est vérifiée sur une droite dirigée par $\vec{z} - \vec{z}'$.

7. (1) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = -5, y = 5\}$,

(2) $\vec{\mathcal{M}}_P = 2\vec{e}_z = \vec{z}$, $P \in D$.

8. (2) $M(0, 1, -1)$.

9. (1) $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{e}_x + 2\vec{e}_z$, (2) $\lambda \in \{0, 2\}$, (3) $\lambda = 0$:
 $\mathcal{T}_0 = \{\vec{z}_0 = -3\vec{e}_z, \vec{\mathcal{M}}_M = (1+3y)\vec{e}_x - 3x\vec{e}_y + 2\vec{e}_z\}$,
 $D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, 3y = -1\}$,
 $\mathcal{T}_0 = \{0, 2\vec{e}_z\} + \{-3\vec{e}_z, (1+3y)\vec{e}_x - 3x\vec{e}_y\}$;
 $\lambda = 2$: $\mathcal{T}_2 = \{\vec{z}_2 = -4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - 3\vec{e}_z,$

$\vec{\mathcal{M}}_M = (1+3y-2z)\vec{e}_x + (4z-3x)\vec{e}_y + (2+2x-4y)\vec{e}_z\}$,
 $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \frac{1}{2}x + 1, z = \frac{3}{4}x + \frac{7}{3}\}$,
 $\mathcal{T}_2 = \{0, -\frac{8}{3}\vec{e}_x - \frac{4}{3}\vec{e}_y - 2\vec{e}_z\} + \{-4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - 3\vec{e}_z,$
 $(\frac{11}{3} + 3y - 2z)\vec{e}_x + (4z - 3x + \frac{4}{3})\vec{e}_y + (4 + 2x - 4y)\vec{e}_z\}$.

11. (1) $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$, $\vec{v} = v_0\vec{e}_x + v_0\omega t\vec{e}_y$
 $= v_0(\cos\varphi - \omega t \sin\varphi)\vec{e}_x + v_0(\sin\varphi + \omega t \cos\varphi)\vec{e}_y$

12. (2) $\|\vec{v}_M\| = \omega\|\vec{IM}\|$, (3) $\|\vec{v}_C\| = \omega R$,

(4) $\vec{v}_M = \vec{v}_C + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, $\vec{a}_M = \vec{a}_C + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$.

13. (2) $C(h \sin \alpha, h \cos \alpha)$,
(3) $C(\frac{h}{2} \sin(2\alpha), \frac{h}{2}(1 + \cos(2\alpha)))$.

14. $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$

15. (1) $\omega_d = \sin \alpha \omega_c$, (2) $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

16. (1) $\ell = \pi R$, $G(0, \frac{2}{\pi}R)$, (2) $\ell = 4R$, $G(\frac{4}{3}R, \frac{7}{3}R)$,
(3) $\ell = \sqrt{5} + \ln \sqrt{2 + \sqrt{5}}$, $G(0, \frac{1}{16} \frac{18\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})})$.

17. (1) $S = \frac{1}{2}\pi R^2$, $G(0, \frac{4R}{3\pi})$, (2) $S = \frac{3}{2}\pi R^2$,
 $G(\frac{5}{6}R, 0)$.

18. Les opérateurs d'inertie correspondants sont répertoriés en Tab. 1.

19. On a $G(0, 0, -\frac{3}{8}R)$ et

$$I_O = m \begin{pmatrix} \frac{2}{5}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}R^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice d'inertie I_G est donnée en Tab. 2.

20. (1) $\omega = (1 - \frac{R}{r})\dot{\varphi}$, (2) $\mathcal{E}_c = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$.

21. $\vec{p} = -6m\ell \sin \theta \dot{\theta} \vec{e}_z$, $\vec{L}_O = 8m\ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta} \vec{e}_z$,
 $\mathcal{E}_c = 2m\ell^2 [\sin^2 \theta (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2) + 2\dot{\theta}^2]$.

22. $\mathcal{E}_c = \frac{1}{24}m\ell^2\omega^2 + M(\frac{\ell^2}{4} + R\ell + \frac{7}{5}R^2)\omega^2$.

23. (1) $\vec{\omega}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{e}_z$, $\vec{\alpha}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \vec{e}_x$,
(2) $\vec{v}_G = \ell \dot{\psi} \sin \theta \vec{e}_x$, $\vec{a}_G = \ell \ddot{\psi}^2 (\cos \theta \vec{e}_z - \vec{e}_x)$,
 $\ell = \|\vec{OG}\|$.

24. (1) $\|\vec{OG}\| = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R = \ell$, (2) $\vec{p} = \frac{4}{3\pi}mR\omega \vec{e}_\varphi$,
 $\vec{L}_O = \frac{1}{2\pi}mR^2\omega(\frac{\pi}{2}\vec{e}_z - \vec{e}_\rho)$, (3) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{8}mR^2\omega^2$.

25. $\alpha_c = \arctan f_s$

26. $\ddot{x}_G = \frac{5}{7}g \sin \alpha$

27. (1) $\vec{P} = 2mg \vec{e}_x$ en G , $\vec{T} = -T \vec{e}_x$ en I ,

(2) $\ddot{x}_G = \frac{2gr^2}{R^2+2r^2}$, (3) $T = \frac{2mgR^2}{R^2+2r^2}$.

28. $\ddot{x}_G = \frac{F}{3m}(\cos \alpha - \frac{r}{R})$

29. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{3}{2}M + 4m}$.

30. (1) $\vec{\omega}_{C_2/\mathcal{R}} = (2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\vec{e}_z$, (2) $\ddot{\varphi}_2 + (\omega_0)^2 \sin \varphi_2 = 0$,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{R} \left(\frac{2J_D + mR^2}{3J_D + mR^2} \right)}$, $\ddot{\varphi}_1 = \alpha \ddot{\varphi}_2$, $\alpha = \frac{mR^2}{4J_D + 2mR^2}$.

31. $\ddot{x}_G = \frac{5}{7}g \sin \alpha$

32. (1) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, (2) $x_G = \frac{x^2}{2\ell}$, $\mathcal{E}_p = -mg\frac{x^2}{2\ell}$,

(3) $\ddot{x} - \frac{g}{\ell}x = 0$.

33. (1) (a) $\dot{x}_A - \frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta} = C^{te}$, $\frac{1}{2}m\ell(\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) = N - mg$,

(b) $\frac{1}{6}m\ell \ddot{\theta} = -N \cos \theta$, (2) $\frac{\ell}{4}(\cos^2 \theta + \frac{1}{3})\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = g \sin \theta_0$,

(3) $v_G = \sqrt{\frac{3g\ell}{4}}$.

34. (1) $x_G = R\omega$, (2) $\dot{x}_G = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$, (3) $\ddot{x}_G = \frac{2}{3}g$,

(4) $T = \frac{1}{3}mg$, (5) $F = \frac{2}{3}mg$.

Algorithme de résolution d'un problème de mécanique

(0) **Préliminaires.**

- Système ? (solide ?, simple ?, composé ?)
- Points remarquables ? (G, I, \dots)

(1) **Cinématique.**

- Contraintes ? ($RSG ?$, ...)
- Champ des vitesses ? ($\vec{\omega} ?$, $\vec{v}_i ?$, $\vec{v}_G ?$, ...)

(2) **Cinétique.** $\vec{p} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G ?$, $\vec{L}_G ?$, $I_G ?$, $\mathcal{E}_c ?$ ($= \frac{1}{2} m_{\text{tot}} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G$)

(3) **Dynamique.**

- Forces ? Points d'application ?
- Théorème de la résultante dynamique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}^{\text{ext}}$
- Théorème du moment cinétique (en $G ?$: $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}}$)
- Synthèse des équations (éliminer les forces indéterminées : N, T, \dots)

(4) **Travail et énergie.**

- Nature des forces ? (conservatives ?, travaillant ou non ?)
- Théorème de l'énergie cinétique/mécanique : $\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}$, $\Delta \mathcal{E} = W$. (C.I. ?)

INDEX

A

- accélération
 - de Coriolis \vec{a}_c , 22
 - d'entraînement \vec{a}_e , 22
- application
 - antisymétrique, 7
 - symétrique, 7
- automoment, 11
- axe
 - central, 12
 - du glisseur, 11
 - principal d'inertie, 28

B

- barycentre G , 27
- basculement, 23
- bras de levier, 14

C

- centre d'inertie, 27
- champ
 - antisymétrique, 8
 - de moments, 8
- coefficient de frottement
 - dynamique f , 44
 - statique f_s , 45

- comoment, 10
- cône de frottement, 45
- coordonnées pluckériennes, 9
- couples, 11

D

- degrés de liberté, 3
- densité volumique de masse, 27
- division vectorielle, 5

E

- éléments de réduction, 9, 13
- énergie
 - cinétique \mathcal{E}_c , 38
 - mécanique \mathcal{E}_m , 54
 - potentielle \mathcal{E}_p , 54
- équation de transport, 8
- équiprojectif, 8

F

- force conservative, 54
- formule
 - de Bour, 21
 - du double produit vectoriel, 4
 - du produit mixte, 4

G

glisseurs, 11

I

impulsion, 38

intégrale première du mouvement, 55

invariant scalaire, 11

L

loi

de composition des accélérations, 22

de composition des vitesses, 19

de distribution des vitesses, 16

du frottement de Coulomb, 44

M

masse, 27

totale, 27

moment, 14

cinétique \vec{L}_A , 38cinétique propre \vec{L}^* , 39

d'inertie, 28

d'inertie I_Δ vis-à-vis de la droite Δ , 29dynamique $\vec{\delta}_A$, 43

mouvement hélicoïdal, 19

O

opérateur d'inertie, 28

P

pivotement, 23

point d'application, 13, 44

produit scalaire entre deux torseurs, 10

puissance \mathcal{P} , 52**Q**

quantité de mouvement, 38

R

référentiel barycentrique, 39

résultante, 8, 14

dynamique, 43

rotation, 17

roulement, 23

S

solide, 2

rigide, 2

somme, 8, 14

symétrie, 32

système de vecteurs liés, 13

T

torseur, 9

cinématique \mathcal{V} , 16cinétique \mathcal{C} , 38des forces \mathcal{F} , 44des vitesses \mathcal{V} , 16dynamique \mathcal{D} , 43

nul, 9

toupie

asymétrique, 28

sphérique, 28

symétrique, 28

translation, 17

travail, 53

trièdre solide, 20

V

vecteur

lié (M, \vec{V}) , 13vitesse angulaire $\vec{\omega}$, 16

vissage, 19

vitesse

de glissement \vec{v}_{gl} , 22d'entraînement \vec{v}_e , 19

UNIVERSITÉ DE CORSE – CNRS UMR 6134 SPE, CAMPUS GRIMALDI BP 52, 20250 CORTE, FRANCE.

Email address: queva@univ-corse.frURL: <http://julien.queva.perso.math.cnrs.fr/>