8 | Opérateurs différentiels

⚠ **Texte en cours de rédaction, version du 5 octobre 2023. Dernière version disponible à l'adresse** `http://julien.queva.perso.math.cnrs.fr/`

Dès ce chapitre nous manipulerons champs, ramenés à des fonctions de plusieurs variables. Par commodité on choisit d'employer pour variables x, y et z, celle-ci peuvent être les coordonnées cartésiennes du ROND usuel ou avoir une toute autre signification, ce que l'on déterminera en fonction du contexte. De même on se limite au cas où ces variables sont au nombre de trois, identiquement au nombre de dimension de l'espace physique, en remarquant que ce qui vaut pour trois se généralise souvent à n. Dans tous les cas ces variables sont réelles.

En analyse passer des fonctions d'une variable aux fonctions de plusieurs variables n'a rien d'aisé. Pour ce faire il s'agit d'appréhender la topologie de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire de préciser les notions de distance, norme, ouverts, limite, continuité, compacité, connexité, ... ce que l'on ne fera pas. On supposera qu'il existe une généralisation "intuitive" de ces notions de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$ et on se reportera au cours d'analyse pour justifier celles-ci.

1. Notion de champs scalaires et vectoriels

Définition 8.1. *Soit* M *un point de l'espace, un* ***champ scalaire*** *est une fonction de* M *à valeur réelle :* $\phi(\mathrm{M})$. *De manière similaire, un* ***champ vectoriel*** *est une fonction de* M *à valeur vectorielle :* $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M})$. *Ces champs sont définis sur tout l'espace, quitte à être nuls.*

Exemple 8.1. De tels champs apparaissent en tous domaines où l'on étudie des systèmes continus (dans l'espace) avec des "flux", des "courants", tel qu'en météorologie (cf. Fig. 8.1) ou, par exemple, dans les cas suivants :

— le champ de pression p, le champ de température T, l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p$, le champ électrostatique V, le champ de Higgs, ...

— le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$, le champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$, le champ des vitesses $\vec{v}$ dans un fluide, ...

Cette notion de champs se généralise aux tenseurs avec, par exemple, le tenseur des contraintes en mécanique des milieux continus, le tenseur énergie-impulsion en relativité.

Remarque. (Importante !) Dans le cas où l'espace est rapporté au ROND cartésien usuel ces champs sont alors vus comme des fonctions des variables (réelles) x, y et z et on a :

a. b.

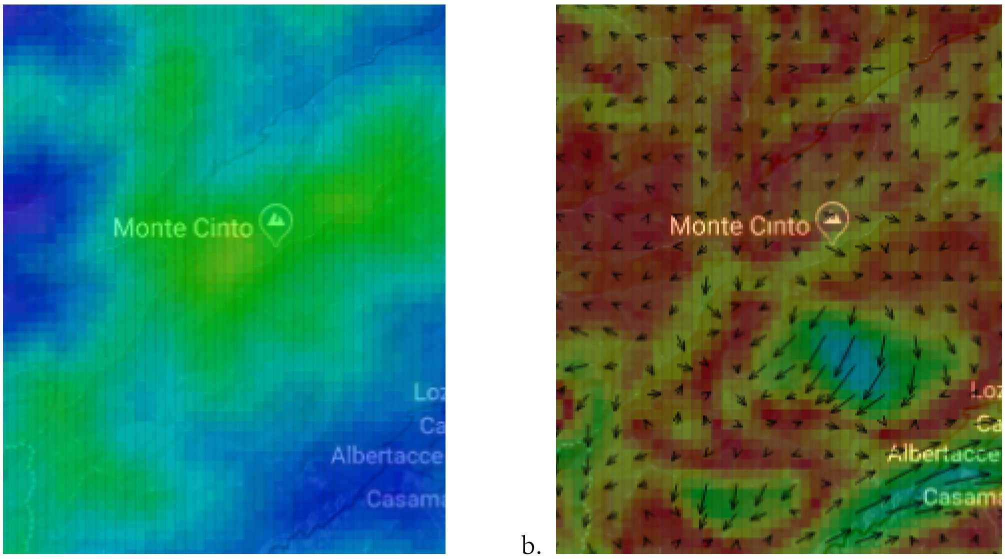

Fig. 8.1 a. Carte des températures en Corse. En un point, d'une couleur donnée, on a une valeur de la température (champ scalaire). b. Carte des vents pour la même région, le même jour. En un point on a une vitesse (vecteur : une direction, un sens, une norme), l'ensemble forme un champ vectoriel. [Images issues des simulations Forefire, Université de Corse, J-B. Filippi (http://forefire.univ-corse.fr/)]

— $\phi(\mathrm{M}) \simeq \phi(x, y, z)$;

— $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) \simeq \vec{\mathrm{E}}(x, y, z)$.

C'est-à-dire que, une fois un repère fixé, l'étude d'un champ se ramène à celle d'une fonction de plusieurs variables réelles. On notera que nous avons choisi une définition "utile" de la notion de champs, une autre plus rigoureuse serait de préciser comment se transforment ces objets sous les changements de repères (référentiels).

Un cas particulier de champ qui intervient en physique est celui des ***champs centraux*** qui en coordonnées sphériques dépendent uniquement de la distance r vis-à-vis de l'origine O. Le potentiel de gravitation engendré par une masse est un champ central en choisissant cette masse comme origine.

2. Rappels sur les fonctions de plusieurs variables

On rapporte l'espace au ROND cartésien usuel, les champs sont alors fonctions des trois variables (indépendantes) x, y et z.

Définition 8.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *alors la* ***dérivée partielle de*** f *par rapport à la variable* x, *notée* $\frac{\partial f}{\partial x}$, *est :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h},$$

lorsque cette limite existe. Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ par rapport aux variables y et z.

Si l'on revient sur l'interprétation de la dérivée en un point, comme vu en première année, alors la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ est la pente de f dans le sens de $\vec{e_x}$. De même, vu la formule définissant la dérivée partielle, dans la pratique on calcule les dérivées partielles (de variables indépendantes) comme les dérivées (droites) ordinaires en considérant, dans le processus de calcul, les autres variables comme des constantes. On rappelle de plus que le symbole ∂ se prononce "d rond" et marque le fait qu'on travaille avec plusieurs variables.

Exemple 8.2. Soit $f(x,y,z) = \cos(x) + 5y^3z + e^z$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= -\sin(x) + 0 + 0 = -\sin(x),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 0 + 5\times 3y^2z + 0 = 15y^2z,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 0 + 5y^3 + e^z = 5y^3 + e^z.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont elles-mêmes des fonctions de plusieurs variables, donc on peut les dériver partiellement avec, par exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{h},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}{h},
\end{aligned}$$

C'est-à-dire qu'on dérive partiellement les fonctions, de plusieurs variables, que sont les dérivées partielles. On notera que les dérivées partielles se lisent "à l'envers", c'est-à-dire que dans l'expression :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

on dérive *d'abord* f par rapport à x, *puis* on dérive le résultat par rapport à y.

Comme les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont elles mêmes des fonctions des trois variables x, y et z alors au second ordre on a a priori $n^2 = 3^2 = 9$ dérivées partielles à calculer :

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.
\end{array}$$

Exemple 8.3. En reprenant la fonction $f(x,y,z) = \cos(x) + 5y^3z + e^z$ de l'exemple précédent, dont on a calculé les dérivées partielles du premier ordre, on a :

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\sin x) = -\cos x,$
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-\sin x) = 0,$
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}(-\sin x) = 0,$
4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(15y^2 z) = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$
5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(15y^2 z) = 30yz,$
6. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}(15y^2 z) = 15y^2,$
7. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(5y^3 + e^z) = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x},$
8. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(5y^3 + e^z) = 15y^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y},$
9. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}(5y^3 + e^z) = e^z.$

Comme on peut le constater dans l'exemple ci-dessus il y a des redondances dans le calcul des dérivées partielles secondes (2 et 4, 3 et 7, 6 et 8). Ce n'est pas accidentel, il s'agit d'une propriété générale établie par le théorème suivant.

Théorème 8.1 (de Schwarz). *Soit f suffisamment régulière (au moins deux fois dérivable), les dérivées partielles croisées du second ordre sont égales, ici :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$$

Ainsi, pour une fonction f suffisamment régulière l'ordre dans lequel on dérive f est insignifiant.

Remarque. On peut aussi dériver les fonctions vectorielles avec :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{E}(x+h, y, z) - \vec{E}(x, y, z)}{h}$$

Idem suivant y et z. Toutes les dérivées s'adaptent aux fonctions à valeur vectorielle, i.e. aux champs vectoriels, soit en notation compacte, soit en termes des composantes de ces fonctions.

3. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

a. Définition et propriétés élémentaires

Définition 8.3. *Soit f une fonction dépendant des trois variables (libres) x, y et z, on associe à cette fonction sa* ***différentielle****, notée* $\mathrm{d}f$*, donnée par la formule :*

$$\boxed{\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}z.}$$

Remarque. La différentielle $\mathrm{d}f$ de f est une *forme différentielle* (de degré 1 : $\mathrm{d}f \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$). Plus précisément, la forme différentielle $\mathrm{d}f$ est une *forme différentielle exacte* : il existe une fonction (ici f) dont cette forme différentielle est la différentielle, on reviendra en détails sur cette notion au chapitre 9.

Quant à la différentielle $\mathrm{d}f$ et aux formes différentielles un point de vue pertinent à adopter pour la suite est le suivant :

— d est un opérateur (différentiel) qui s'applique sur la fonction f, on peut noter $\mathrm{d}f = \mathrm{d}(f)$;

— dans l'écriture de $\mathrm{d}f$ il est "bon" de voir $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ comme des "vecteurs" de base des formes différentielles $\mathcal{B} = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$. Alors, dans ce point de vue, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont vus comme les composantes du "vecteur" $\mathrm{d}f$ dans la base $\mathcal{B}$.

— $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ sont les différentielles de x, y et z qui sont des variables indépendantes. On a $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x)$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(y)$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}(z)$.

Propriété 8.1. *Des propriétés des dérivées on en déduit celles de la différentielle :*

1. $\mathrm{d}(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}f$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$;
3. $\mathrm{d}(fg) = (\mathrm{d}f)g + f(\mathrm{d}g)$, *(Leibniz)* ;
4. $\mathrm{d}f(g) = f'(g)\mathrm{d}g$, *(fonctions composées, avec* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*)* ;
5. $\mathrm{d}c = 0$, *pour c une constante* ;

Exemple 8.4. Soit $f(x,y,z) = xy\cos(y-z)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(y-z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(y-z) + xy \times (-\sin(y-z)) \times (+1) = x\cos(y-z) - xy\sin(y-z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \times (-\sin(y-z)) \times (-1) = xy\sin(y-z),$$

En collectant ces dérivées partielles on en déduit la forme différentielle $\mathrm{d}f$ avec

$$\mathrm{d}f = y\cos(y-z)\mathrm{d}x + [x\cos(y-z) - xy\sin(y-z)]\mathrm{d}y + xy\sin(y-z)\mathrm{d}z.$$

Exemple 8.5. Il se peut qu'on sache, par principe, qu'une forme différentielle est exacte et, donc, que celle-ci est la différentielle d'une fonction. En thermodynamique, par exemple, on établit l'identité fondamentale :

$$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S,$$

c'est-à-dire que la fonction énergie interne U dépend des variables (naturelles) volume V et entropie S avec $U = U(V,S)$. De la définition de la différentielle on a pour la fonction $U(V,S)$:

$$\mathrm{d}U(V,S) = \frac{\partial U}{\partial V}\,\mathrm{d}V + \frac{\partial U}{\partial S}\,\mathrm{d}S,$$

ce qui, par identification des coefficients de la forme différentielle dU, permet d'obtenir :

$$-p = \frac{\partial U}{\partial V}, \qquad T = \frac{\partial U}{\partial S}.$$

Vu que la fonction U existe et est (supposée) suffisamment régulière ses dérivées partielles du second ordre croisées sont égales soit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial U}{\partial V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial(-p)}{\partial S}.$$

On obtient ainsi la ***relation de Maxwell*** associée au potentiel U :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V,$$

dans les notations de la thermodynamique (cf. chapitre 11 où ces notations sont détaillées).

On peut procéder identiquement pour l'énergie libre $F = U - TS$ de différentielle :

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(U - TS) = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T = -p\,\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T,$$

en exploitant les propriétés de la différentielle d. Étant donné que $\mathrm{d}F = -p\,\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T$, c'est-à-dire que F est une fonction des variables (naturelles) V et T, et en comparant avec la différentielle $\mathrm{d}F(V,T)$ on obtient par identification :

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}, \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Vu que F existe et que ses dérivées partielles du second ordre croisées sont égales, on obtient la relation de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T.$$

Toutes les relations de Maxwell obtenues en thermodynamique, sur les potentiels U, F, H, G ou toute autre fonction adaptée, sont (simplement) des conséquences du fait que ces fonctions existent et que leurs dérivées partielles du second ordre croisées sont égales.

b. Interprétation et application au calcul d'incertitudes de la différentielle

À une fonction f on a associé sa différentielle $\mathrm{d}f$. Cet objet pour l'instant reste formel, peut-on en donner une interprétation ?

Si $f(x,y,z)$ est la valeur (numérique) de f au point M de coordonnées (x,z,y) alors $\mathrm{d}f$ *peut être vue comme un accroissement infinitésimal de* f en faisant varier x de $\Delta x \approx \mathrm{d}x$, y de $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ et z de $\Delta z \approx \mathrm{d}z$:

$$\Delta f(x,y,z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z.$$

On notera en particulier que si on trouve un point pour lequel $\mathrm{d}f = 0$ alors ce point est un extrema de f (minimum, maximum, point selle/col).

Avec ce point de vu on peut appliquer la différentielle au *calcul de propagation des incertitudes*.

Définition 8.4. *Supposons que f soit une fonction des deux variables indépendantes x et y et que ces variables sont mesurées avec les incertitudes Δx et Δy, respectivement, alors l'**incertitude** Δf sur f est :*

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y,}$$

*et son **incertitude relative** est :*

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \left|\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right|\Delta y = \Delta \ln f.$$

Dans ces définitions on notera les valeurs absolues qu'on impose car autrement des incertitudes de mesures pourraient se compenser entre elles, ce qui ne peut être autorisé. De même, pour l'incertitude relative on pourra employer son expression à partir de $\ln f$ qui permet d'employer la propriété (utile) du logarithme de transformer les produits en somme.

Exemple 8.6. Une résistance $\mathrm{R} = (10{,}0 \pm 0{,}1)\,\Omega$ est soumise à un différence de potentiel (ddp) $\mathrm{U} = (220 \pm 1)\,\mathrm{V}$ et on souhaite obtenir l'intensité I du courant traversant la résistance donnée par la relation $\mathrm{I} = \mathrm{U}/\mathrm{R}$. L'application numérique donne :

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}} = 22{,}000\,000\,000\ldots\ \mathrm{A}$$

à laquelle il faut affecter son incertitude $\Delta\mathrm{I}$ avec un nombre de chiffres significatifs pertinents. Plutôt que d'employer la formule donnant $\Delta\mathrm{I}$ il est plus simple de calculer l'incertitude relative vu que $\ln \mathrm{I} = \ln(\mathrm{U}/\mathrm{R}) = \ln \mathrm{U} - \ln \mathrm{R}$ soit :

$$\frac{\Delta\mathrm{I}}{|\mathrm{I}|} = \left|\frac{1}{\mathrm{U}}\right|\Delta\mathrm{U} + \left|-\frac{1}{\mathrm{R}}\right|\Delta\mathrm{R} = \frac{1}{220} + \frac{0,1}{10} \approx 0,0145 = 1,5\%$$

ce qui donne

$$\Delta\mathrm{I} = \mathrm{I}\,\frac{\Delta\mathrm{I}}{|\mathrm{I}|} = 220 \times 1,5\% = 0{,}32\,\mathrm{A}$$

donc $\mathrm{I} = (22{,}00 \pm 0{,}32)\,\mathrm{A}$, avec autant de chiffres significatifs que ceux de l'incertitude.

c. *L'élément de déplacement* $\mathrm{d}\vec{r}$

La notion de différentielle s'applique tout autant à un champ de vecteurs, on a :

$$\mathrm{d}\vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

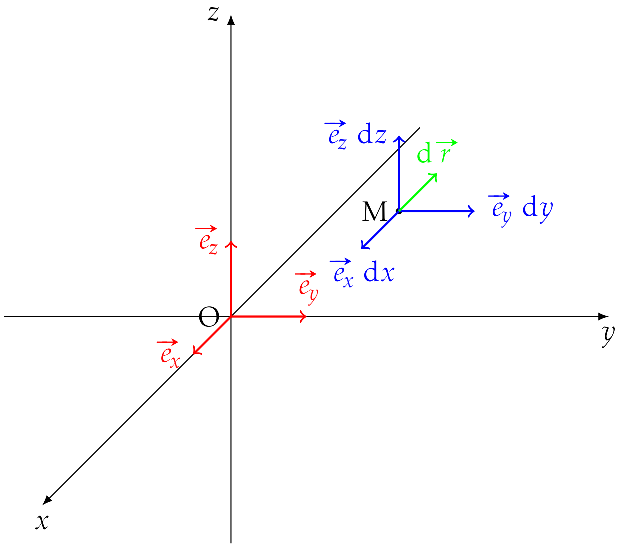

Fig. 8.2 L'élément de déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$ comme un "petit déplacement" dans l'espace réel autour du point M.

si le champ de vecteurs $\vec{v}$ dépend des variables x, y et z par exemple. On peut appliquer cette formule en particulier au rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ avec O l'origine du repère et M le point courant.

Définition 8.5. *On appelle* ***l'élément de déplacement*** *(infinitésimal) la forme différentielle vectorielle :*

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(\vec{r}) = \mathrm{d}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}).$$

On peut, de manière quelque peu abusive, "voir" $\mathrm{d}\vec{r}$ comme un petit "déplacement" dans l'espace réel (cf. Fig. 8.2).

L'expression de $\mathrm{d}\vec{r}$ dépend du système de coordonnées choisi. Dans les coordonnées cartésiennes, par exemple, on a : $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ avec $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ la base cartésienne *fixe*, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z)\\ &= (\mathrm{d}x)\vec{e}_x + (\mathrm{d}y)\vec{e}_y + (\mathrm{d}z)\vec{e}_z + x(\mathrm{d}\,\vec{e}_x) + y(\mathrm{d}\,\vec{e}_y) + z(\mathrm{d}\,\vec{e}_z)\\ &= \vec{e}_x\mathrm{d}x + \vec{e}_y\mathrm{d}y + \vec{e}_z\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

en employant le fait que les vecteurs de base sont fixes, donc de différentielle nulle. Dans une base *mobile* telle que la base cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ on l'on a $\vec{r}(\rho,\varphi,z) = \rho\,\vec{e}_\rho(\varphi) + z\,\vec{e}_z$ l'expression de $\mathrm{d}\vec{r}$ fait intervenir la différentielle

$$\mathrm{d}\,\vec{e}_\rho(\varphi) = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z}\mathrm{d}z = \vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}(\rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z) \\
&= (\mathrm{d}\rho)\,\vec{e}_\rho + (\mathrm{d}z)\,\vec{e}_z + \rho(\mathrm{d}\,\vec{e}_\rho) + z(\mathrm{d}\,\vec{e}_z) \\
&= \vec{e}_\rho \mathrm{d}\rho + \rho\,\vec{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Ainsi, avec cette méthode, on obtient le déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$ dans tous les systèmes de coordonnées, on retiendra les différentes expressions :

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r} &= \vec{e}_x \mathrm{d}x + \vec{e}_y \mathrm{d}y + \vec{e}_z \mathrm{d}z && \text{(cartésien)} \\
&= \vec{e}_\rho \mathrm{d}\rho + \rho\,\vec{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z \mathrm{d}z && \text{(cylindriques)} \\
&= \vec{e}_r \mathrm{d}r + r\,\vec{e}_\theta \mathrm{d}\theta + r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi && \text{(sphériques)}
\end{aligned}}$$

4. L'opérateur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$

a. *Définition et propriétés élémentaires*

Définition 8.6. *Soit f une fonction de plusieurs variables, i.e. un champ scalaire dans un repère donné, sa différentielle fait apparaître le **gradient** de f, noté $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$, via l'équation :*

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}(f)\cdot \mathrm{d}\vec{r}.}$$

Cette définition lie le gradient de f à la différentielle $\mathrm{d}f$ de f. Elle présente l'avantage d'être indépendante du système de coordonnées et nous assure que $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ est un champ de vecteurs. Par ailleurs, connaissant l'élément de déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$ dans un système de coordonnées on en déduit, grâce à cette expression, le gradient dans ces mêmes coordonnées (cylindriques ou sphériques par exemple).

Propriété 8.2. *Des propriétés de la différentielle on en déduit celles du gradient :*

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g)$;
3. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = g\,\overrightarrow{\text{grad}}(f) + f\,\overrightarrow{\text{grad}}(g)$, *(Leibniz)* ;
4. $\overrightarrow{\text{grad}}(f(g)) = f'(g)\,\overrightarrow{\text{grad}}(g)$, *(fonctions composées, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).*

Exemple 8.7. Avec ces propriétés on peut obtenir, quasiment sans calculs et sans choisir de système de coordonnées, des identités utiles. Notons que $r^2 = \|\vec{r}\|^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$, alors

$$\mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = 2\,\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}(r^2)\cdot\mathrm{d}\vec{r},$$

en employant l'identité de Leibniz sur les différentielles, puis en identifiant avec la définition du gradient on en déduit que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^2) = 2\vec{r}.$$

En notant que $r = \sqrt{r^2}$ et en employant la formules sur les fonctions composées on en déduit que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\sqrt{r^2}) = \frac{1}{2\sqrt{r^2}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^2) = \frac{1}{2r}\,2\vec{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \vec{e}_r,$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = \vec{e}_r.$$

Au delà des identités que l'on peut obtenir directement des propriétés du gradient il s'agit, pour ce qui est des calculs pratiques, d'obtenir son expression dans les différents systèmes de coordonnées. Dans la base cartésienne on peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = g_x\,\vec{e}_x + g_y\,\vec{e}_y + g_z\,\vec{e}_z$$

où les composante g_x, g_y et g_z du gradient sont à déterminer. Dans cette base on sait que l'élément de déplacement s'écrit comme

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_x\,\mathrm{d}x + \vec{e}_y\,\mathrm{d}y + \vec{e}_z\,\mathrm{d}z,$$

ce qui, en effectuant le produit scalaire dans la BOND $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\mathrm{d}\vec{r} = g_x\mathrm{d}x + g_y\mathrm{d}y + g_z\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Alors, en identifiant les coefficients de la forme différentielle $\mathrm{d}f$ on en tire :

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x},\quad g_y = \frac{\partial f}{\partial y},\quad g_z = \frac{\partial f}{\partial z},$$

soit l'expression du gradient de f en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e}_z.$$

Evidemment c'est dans les bases mobiles que cette approche est féconde. En effet, en coordonnées cylindrique, par exemple, on a :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_\rho\mathrm{d}\rho + \rho\,\vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z\mathrm{d}z,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = g_\rho\,\vec{e}_\rho + g_\varphi\,\vec{e}_\varphi + g_z\,\vec{e}_z,$$

soit en employant la même méthode :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f\cdot\mathrm{d}\vec{r} = g_\rho\mathrm{d}\rho + \rho g_\varphi\mathrm{d}\varphi + g_z\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

dont on tire les composantes g_ρ, g_φ et g_z du gradient en identifiant les composantes de la forme différentielle $\mathrm{d}f$. En procédant de même en coordonnées sphériques on obtient les différentes

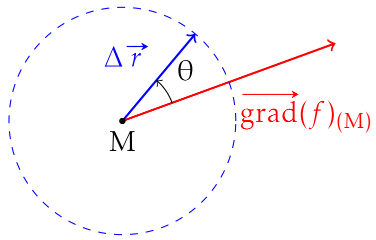

Fig. 8.3 Interprétation du gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ de f en M, vis-à-vis de l'accroissement de f dans la direction $\Delta\vec{r}$, pour $\|\Delta\vec{r}\|$ fixé.

expressions :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z && \text{(cartésien)}\\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z && \text{(cylindriques)}\\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi, && \text{(sphériques)}\end{aligned}}$$

b. Interprétation géométrique du gradient

De l'interprétation de la différentielle df comme d'un accroissement de f on en tire l'interprétation du gradient. En effet, on peut écrire :

$$f(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \Delta f = f(\vec{r}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\Delta\vec{r} + \mathrm{O}\left(\|\Delta\vec{r}\|^2\right)$$

soit en exploitant les propriétés du produit scalaire :

$$\Delta f(\mathrm{M}) \approx \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}\cdot\Delta\vec{r} \approx \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}\right\| \|\Delta\vec{r}\|\cos\theta.$$

Au point M le gradient est un vecteur fixé, si l'on fixe en plus la norme du déplacement $\|\Delta\vec{r}\|$ on en déduit que l'accroissement Δf, qui est le produit de deux termes positifs fixes avec un cosinus, dépend uniquement des directions respectives entre ces deux vecteurs, cf. Fig. 8.3. Dans ce cas, on a :

— pour $\theta = 0$, c'est-à-dire pour $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ et $\Delta\vec{r}$ colinéaires et de même sens, on a $\cos\theta = 1$ et f croît (maximalement) dans cette direction ;

— pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ et $\Delta\vec{r}$ orthogonaux, on a $\cos\theta = 0$ et la fonction f est constante dans cette direction ;

— pour $\theta = \pi$, c'est-à-dire pour $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ et $\Delta\vec{r}$ colinéaires et de sens opposés, on a $\cos\theta = -1$ et f décroît (maximalement) dans cette direction.

Donc, grâce au gradient en un point, on sait dans quelle direction aller afin d'accroitre de proche en proche f et d'atteindre un maximum (local) de cette fonction, ou minimiser (localement) celle-ci (en effectuant une *descente de gradient*). En se déplaçant orthogonalement au gradient, par contre, la fonction reste constante, ceci décrit des lieux des points remarquables.

Définition 8.7. *Le lieu des points tels que $f = c =$ constante sont des **lignes iso-f** à deux dimensions ou des **surfaces iso-f** à trois dimensions.*

On a établi que le gradient est orthogonal à ces courbes/surfaces iso-f. Ce qu'on redémontre facilement, sur une surface iso-f la différentielle de f s'annule :

$$\mathrm{d}f\Big|_{f=c} = \mathrm{d}c\Big|_{f=c} = 0,$$

où l'on utilise la notation $\bullet\Big|_{\dots}$ qui signifie que "la contrainte ... est imposée à $\bullet$", dans le cas présent la contrainte $f = c$ est imposée à la différentielle $\mathrm{d}f$. La différentielle $\mathrm{d}f$ s'écrit tout autant :

$$\mathrm{d}f\Big|_{f=c} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\mathrm{d}\vec{r}\Big|_{f=c}$$

comme le déplacement $\mathrm{d}\vec{r}\Big|_{f=c}$ est tangent à la surface iso-f (penser au vecteur vitesse) on en déduit que *le gradient est orthogonal aux surfaces iso-f*.

Exemple 8.8.

- 2D : pour $z = f(x,y)$, les lignes d'altitude constante $z = f = c$ sont les *courbes de niveaux* de f, cf. Fig. 8.4 ;
- 2D : pour les variables p, V et T les courbes $\mathrm{T} = \mathrm{T}(p,\mathrm{V}) = c$ sont les courbes isothermes du système dans un diagramme de Clapeyron ;
- 3D : l'équation $f(p,\mathrm{V},\mathrm{T}) = 0$ est l'*équation d'état* d'un système thermoélastique (e.g. $p\mathrm{V} - n\mathrm{RT} = 0$) ;
- 3D : les surfaces telles que $\mathrm{V}(x,y,z) = c$, pour V le potentiel électrostatique, sont des *surfaces équipotentielles*.

Exemple 8.9. Soit la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Les lignes iso-f de cette fonction sont les courbes telles que :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = c,$$

où c est une constante numérique réelle. Pour $c \geqslant 0$, ces courbes sont les cercles centrés sur l'origine O et de rayon c, cf. Fig. 8.5.

Notons qu'un point de la courbe iso-f $f = c \geqslant 0$ peut être paramétré par :

$$x\Big|_{f=c} = x(\varphi) = c\cos\varphi, \qquad y\Big|_{f=c} = y(\varphi) = c\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Le vecteur déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$ le long de la courbe $f = c$ est alors :

$$\mathrm{d}\vec{r}\Big|_{f=c} = \left(\vec{e}_x\,\mathrm{d}x + \vec{e}_y\,\mathrm{d}y\right)\Big|_{f=c} = \left[\vec{e}_x(-c\sin\varphi) + \vec{e}_y(c\cos\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi\Big|_{f=c} = (-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y)\mathrm{d}\varphi\Big|_{f=c}.$$

En inspectant $\mathrm{d}\vec{r}|_{f=c}$ on en déduit que :

$$\vec{v}(x,y) = \frac{-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

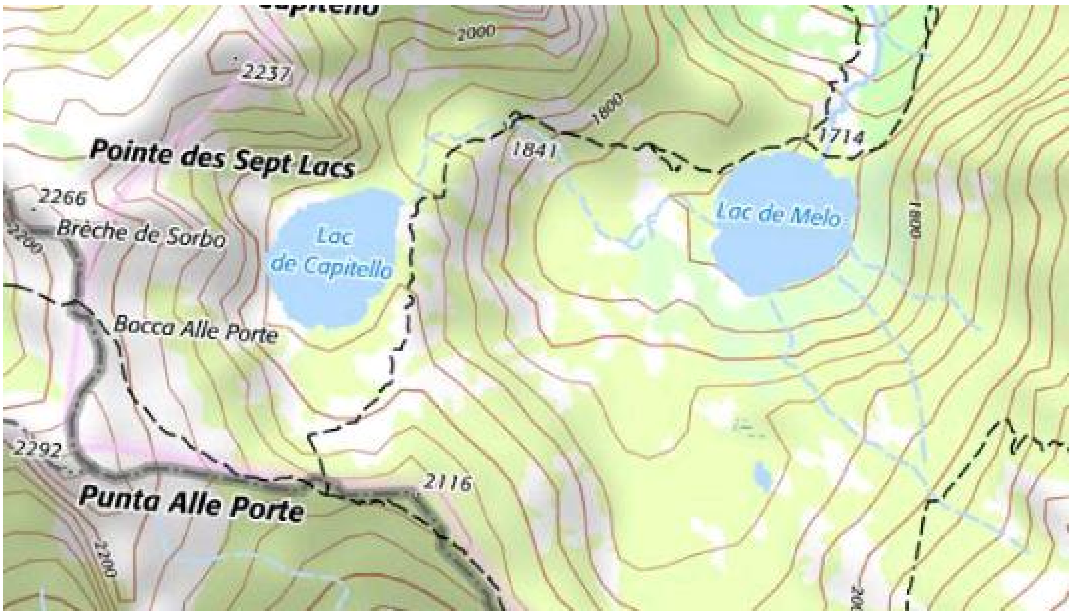

Fig. 8.4 Carte topographique autour de la pointe des Sept Lacs, au fond de la vallée de la Restonica. Les courbes de niveaux sont représentées en brun, on voit en particulier la courbe à 1800 m et celle à 2000 m.

est le champ des vecteurs (unitaires) tangents aux lignes iso-f, i.e. le vecteur $\vec{v}$ au point de coordonnées (x,y) est tangent à la courbe iso-f passant par ce point.

Pour $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ on a, immédiatement, le gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{e}_y = \frac{x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Alors, quelque soit le point de coordonnée (x,y) on a :

$$\begin{aligned}
\vec{v}(x,y)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) &= \left(\frac{-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(\frac{x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y)\cdot(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

et on vérifie ainsi qu'en tous points le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, cf. Fig. 8.5.

Remarque. Eu égard à la *symétrie* de $f = \sqrt{x^2+y^2}$ on devine qu'il serait, probablement, plus pertinent d'étudier ce champ dans les coordonnées cylindriques. En effet, comme alors $f = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$ l'application directe de la formule du gradient dans ces coordonnées donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{e}_\rho,$$

expression substantiellement plus simple que celle obtenue en coordonnées cartésiennes.

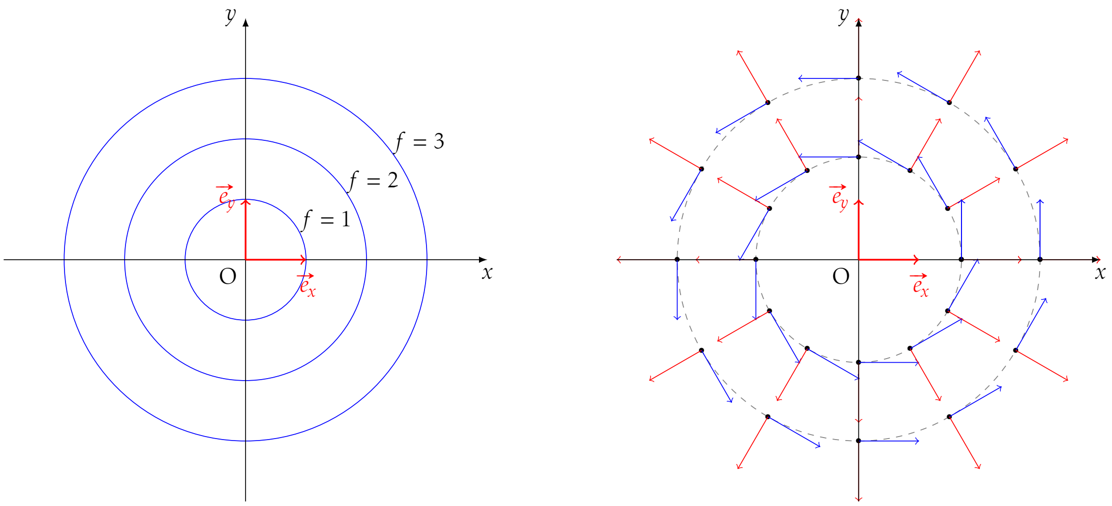

Fig. 8.5 (a) Lignes iso-f de la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. (b) Champ de vecteurs tangents aux lignes iso-f de la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (en bleu) et le champ de gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ (en rouge). En tout point du plan ces champs sont orthogonaux.

Pour résumer, le gradient de f possède une interprétation concrète que l'on rassemble dans la propriété suivante.

Propriété 8.3. *Soit f une fonction et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ son gradient au point* M, *alors :*

— $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ *donne la direction de plus forte croissance de f au point* M ;

— $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_{(\mathrm{M})}$ *est orthogonal à la ligne(/surface) iso-f en* M.

c. *Le gradient en physique*

Les gradients abondent en physique :

— une force conservative $\vec{\mathrm{F}}$ dérive d'une énergie potentielle : $\vec{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathscr{E}_p)$;

— le champ électrostatique $\vec{\mathrm{E}}$ dérive du potentiel électrostatique V : $\vec{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{V})$;

— le champ de vitesses $\vec{v}$ d'un écoulement irrotationnel, en mécanique des fluides, dérive du potentiel des vitesses φ : $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi)$.

De fait, les forces dérivant d'un potentiel vont contre le gradient car les systèmes *descendent* le potentiel pour aller vers un état (d'équilibre ?) d'énergie moindre. Par exemple, un cours d'eau va dévaler la pente d'une montagne le long des courbes de plus grande pente (descendantes), contre le gradient de l'énergie potentielle de pesanteur, orthogonalement aux courbes de niveau, cf. Fig 8.6.

Les gradients apparaissent systématiquement dans les ***lois de modération*** :

— ***loi de Fourier*** : $\vec{j} = -\kappa\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{T})$, avec κ une conductibilité thermique et T la température ;

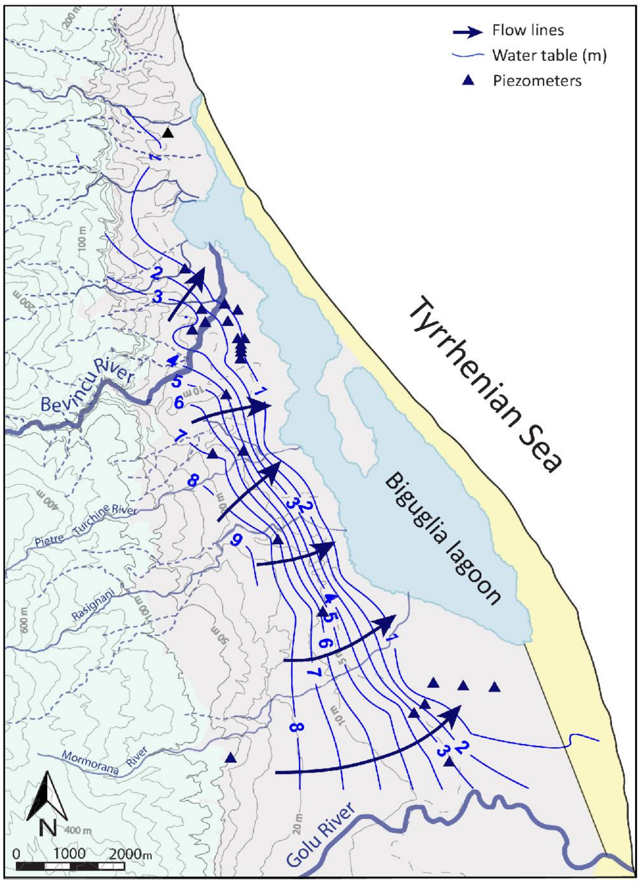

Fig. 8.6 Carte piézométrique de la nappe aquifère de la Marana. Les courbes de niveau apparaissent en bleu, l'écoulement de l'eau s'effectue contre le gradient (d'altitude) suivant les flèches en bleu orthogonales aux courbes niveau. [Image extraite de Journal of Hydrology 578(3465):123979 (2019), avec l'aimable autorisation de M. Erostate, Université de Corse]

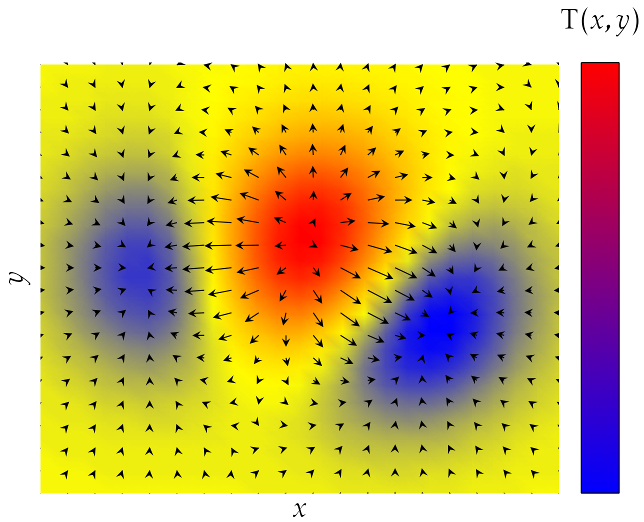

Fig. 8.7 Schéma des températures T sur une plaque en niveaux de couleur avec les courants thermiques $\vec{\jmath}$, vérifiant la loi de Fourier, amenant la chaleur des sources chaudes (en rouge) vers les sources froides (en bleu).

— ***loi de Fick*** : $\vec{\jmath} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho_V)$, avec D un coefficient de diffusion et ρ_V une densité volumique ;

— ***loi d'Ohm*** : $\vec{\jmath} = -\sigma\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) = \sigma\vec{E}$, avec σ une conductibilité électrique, V le potentiel électrostatique et $\vec{E}$ le champ électrostatique.

Dans tous ces cas un courant $\vec{\jmath}$ est créé pour contrebalancer les différences d'un champ scalaire (ici T, ρ_V et V) et *descendre* (signe moins) des valeurs "hautes" vers les valeurs "basses". Pour la loi de Fourier, par exemple, ce sont les différences de températures entre les différents points d'un matériau qui créent un courant de chaleur $\vec{\jmath}$ allant des températures hautes vers les températures basses, visant à rendre la température homogène dans le système (cf. Fig. 8.7).

5. L'opérateur nabla et les autres opérateurs différentiels

On introduit comme intermédiaire un nouvel opérateur, l'opérateur nabla, *via* un jeu d'écriture sur l'opérateur gradient. Ceci permet d'introduire très tôt les opérateurs différentiels restants, la divergence et le rotationnel, ainsi que les formules explicites permettant de les calculer (dans les différents systèmes de coordonnées). Malheureusement, l'interprétation de ces nouveaux opérateurs est reléguée à un chapitre ultérieur.

a. l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$

On adopte un nouveau point de vu sur l'opérateur gradient en voyant celui-ci comme l'application d'un nouvel opérateur sur les champs scalaires.

Définition 8.8. *On définit l'opérateur différentiel* ***nabla****, noté* $\vec{\nabla}$*, comme étant l'opérateur tel que :*

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f),}$$

où $\vec{\nabla}$ *"opère" sur ce qui est à sa droite.*

Dans les coordonnées cartésiennes, par exemple, nous avons établi que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e_z},$$

alors en mettant f "à droite" on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{e_x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \vec{e_y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \vec{e_z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \vec{\nabla} f$$

où l'on dérive d'abord f vis-à-vis de ses variables puis on multiplie par les différents vecteurs constituant la base. On en déduit l'expression de $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes, ainsi que dans tout autre système de coordonnées :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z} && \text{(cartésien)}\\
&= \vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{e_\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z} && \text{(cylindriques)}\\
&= \vec{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e_\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e_\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} && \text{(sphériques)}
\end{aligned}$$

où l'opérateur $\vec{\nabla}$ existe "en soi" et prend son sens en fonction de ce sur quoi il s'applique (à sa droite).

Remarque. Dans les bases mobiles il s'agit de bien faire attention à l'ordre des termes vu que, par exemple, on a : $\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} = \vec{e_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \vec{e_\rho} \neq \vec{e_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

b. Les autres opérateurs différentiels : divergence et rotationnel

L'opérateur nabla peut s'appliquer sur un scalaire, c'est ainsi qu'on l'a défini, mais aussi sur un champ vectoriel, ce qui définit de nouveaux opérateurs.

Définition 8.9. *L'opérateur nabla* $\vec{\nabla}$ *définit de nouveaux opérateurs différentiels en fonction de ce sur quoi il s'applique :*

- *un scalaire* ϕ *:* $\vec{\nabla}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)$ *l'opérateur* ***gradient*** *qui à un scalaire associe un vecteur ;*
- *un vecteur* $\vec{v}$ *:*
  1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \mathrm{div}(\vec{v})$ *l'opérateur* ***divergence*** *qui à un vecteur associe un scalaire ;*

2. *$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})$ l'opérateur **rotationnel** qui à un vecteur associe un vecteur.*

Tous ces opérateurs apparaissent naturellement en hydrodynamique, électromagnétisme, transferts thermiques (tout sujet dans lequel il y a des "flux") au moyen des théorèmes intégraux (cf. chapitre 10). C'est dans ce cadre qu'ils gagneront leur interprétation.

Remarque. Étant donné un vecteur $\vec{v}$ on peut définir l'opérateur $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ à appliquer sur un scalaire ou un vecteur et qui représente alors la ***dérivée directionnelle*** dans le sens de $\vec{v}$ du champ. C'est un opérateur apparaissant fréquemment en hydrodynamique sous le terme d'***opérateur d'advection***.

Vu que l'opérateur nabla est un opérateur vectoriel différentiel (i.e. une identité de Leibniz est satisfaite), on en déduit les identités remarquables suivantes.

Propriété 8.4. *Pour f, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des champs scalaire et vectoriels, respectivement, les identités suivantes sont satisfaites.*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(f\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{a} + f\,\mathrm{div}(\vec{a}), && \overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\wedge\vec{a} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}),\\
&\mathrm{div}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}) - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{b}), && \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \mathrm{div}(\vec{b})\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - \mathrm{div}(\vec{a})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons la première identité :

$$\mathrm{div}(f\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{a} + f\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{a} + f\,\mathrm{div}(\vec{a})$$

en ramenant le f vers la gauche et en tenant compte du fait qu'on le dérive ou non, puis en reconnaissant dans l'expression finale le gradient et la divergence. La deuxième identité se démontre identiquement en remplaçant le produit scalaire par le produit vectoriel. Pour la troisième identité on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\vec{a}\wedge\vec{b}) &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\vec{\nabla}_a+\vec{\nabla}_b)\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{\nabla}_a\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) - \vec{\nabla}_b\cdot(\vec{b}\wedge\vec{a})\\
&= \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}_a\wedge\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}_b\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}) - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{b}),
\end{aligned}$$

où, sachant que $\vec{\nabla}$ agit sur un produit, on découpe celui-ci en le cas où il dérive $\vec{a}$ et celui où il dérive $\vec{b}$, ce qui après manipulation autorise l'emploi de la formule du produit mixte. Pour ce qui est de la dernière identité on utilise la même stratégie :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\vec{\nabla}_a+\vec{\nabla}_b)\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

A présent on souhaite employer la formule du double produit vectoriel en faisant attention à ce que, par exemple, $\vec{a}$ ne "passe pas à gauche" de $\vec{\nabla}_a$:

$$\vec{\nabla}_a\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\vec{\nabla}_a\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{\nabla}_a\cdot\vec{a})\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla}_a)\vec{a} - \mathrm{div}(\vec{a})\vec{b} = (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - \mathrm{div}(\vec{a})\vec{b}$$

en procédant de même avec le terme $\vec{\nabla}_b\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = -\vec{\nabla}_b\wedge(\vec{b}\wedge\vec{a})$ on obtient la dernière formule :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}\wedge\vec{b}) &= (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - \mathrm{div}(\vec{a})\vec{b} - [(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} - \mathrm{div}(\vec{b})\vec{a}]\\
&= (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \mathrm{div}(\vec{b})\vec{a} - \mathrm{div}(\vec{a})\vec{b},
\end{aligned}$$

avec l'opérateur d'advection apparaissant au second membre. □

Étant donné l'expression de $\vec{\nabla}$ on en déduit celle de la divergence et du rotationnel. En coordonnées cartésiennes, par exemple, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \left(\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(v_x\,\vec{e_x} + v_y\,\vec{e_y} + v_z\,\vec{e_z}\right) \\
&= \vec{e_x}\frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \vec{e_x} + \vec{e_x} v_x \cdot \frac{\partial \vec{e_x}}{\partial x} + \vec{e_x}\frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \vec{e_y} + \vec{e_x} v_y \cdot \frac{\partial \vec{e_y}}{\partial x} + \ldots + \vec{e_z} v_z \cdot \frac{\partial \vec{e_y}}{\partial z},
\end{aligned}$$

en développant cette expression nous avons $3 \times 3 = 9$ termes à considérer et comme on dérive des produits en fait il y a $2 \times 9 = 18$ termes en tout. Mais comme les vecteurs de base $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes leurs dérivées s'annulent. Ensuite, comme $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ est une BON nous avons $\vec{e_x} \cdot \vec{e_x} = 1$, $\vec{e_x} \cdot \vec{e_y} = 0$, etc., peu de termes subsistent. Au final on a :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.}$$

Pour ce qui est du rotationnel on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \left(\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge \left(v_x\,\vec{e_x} + v_y\,\vec{e_y} + v_z\,\vec{e_z}\right) \\
&= \vec{e_x}\frac{\partial v_x}{\partial x} \wedge \vec{e_x} + \vec{e_x} v_x \wedge \frac{\partial \vec{e_x}}{\partial x} + \vec{e_x}\frac{\partial v_y}{\partial x} \wedge \vec{e_y} + \vec{e_x} v_y \wedge \frac{\partial \vec{e_y}}{\partial x} + \ldots + \vec{e_z} v_z \wedge \frac{\partial \vec{e_y}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Les remarques utilisées lors du calcul de la divergence s'appliquent : les dérivées des vecteurs de base s'annulent et comme $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ forment une BOND ($\vec{e_x} \wedge \vec{e_y} = \vec{e_z}$, etc) peu de termes survivent dans l'expression de $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v})$ en coordonnées cartésiennes et, en définitive, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.}$$

Dans une base mobile, par contre, il n'y a pas la simplification du fait que les vecteurs de base ont des dérivées nulles. Dans la base cylindrique, par exemple, on a :

$$\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \varphi} = \vec{e_\varphi}, \qquad \frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi} = -\vec{e_\rho}.$$

Alors, avec l'expression de $\vec{\nabla}$ dans ces coordonnées et en tenant compte de ces dérivées, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \left(\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\vec{e_\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(v_\rho\,\vec{e_\rho} + v_\varphi\,\vec{e_\varphi} + v_z\,\vec{e_z}\right) \\
&= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\vec{e_\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \varphi} v_\rho + \frac{1}{\rho}\vec{e_\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi} v_\varphi \\
&= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},
\end{aligned}$$

en exploitant le fait que $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ est une BON et que $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ ne dépendent que de la variable φ (donc seules deux dérivées partielles des vecteurs de base sont à considérer). La dernière expression s'obtient de la précédente avec une intégration par partie qui rend le résultat plus compact. De même, pour le rotationnel on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge \left(v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z\right) \\
&= \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho \\
&\quad + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \wedge \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial\varphi} v_\rho + \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi \wedge \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} v_\varphi \\
&= \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} v_\varphi \vec{e}_z \\
&= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\varphi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

où, comme précédemment, on a utilisé le fait que $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ est une BOND et que seules sont à considérer les dérivées partielles de $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ par rapport à φ comme termes additionnels. La dernière expression, plus compacte, s'obtient après simplifications et réarrangement des termes.

En appliquant la même stratégie on obtient les expressions de ces opérateurs en coordonnées sphériques, expressions compilées dans le formulaire en appendice.

Remarque. Dans la base cartésienne fixe on peut obtenir le résultat des opérateurs divergence et rotationnel par un calcul sur les vecteurs colonnes des composantes du champ vectoriel avec :

$$\mathrm{div}(\vec{v})\text{“}=\text{”}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\text{“}=\text{”}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}\text{“}=\text{”}\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

On fera néanmoins attention au fait que cette écriture est pratique uniquement dans le cas où on est dans ce système de coordonnées. En effet, dans une base mobile on doit tenir compte des dérivées des vecteurs de base ce qui, pour aboutir au résultat juste, donne lieu à des expressions plus exotiques telles que :

$$\mathrm{div}(\vec{v})\text{“}=\text{”}\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_\rho\\ v_\varphi\\ v_z\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\text{“}=\text{”}\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}v_\rho\\ v_\varphi\\ v_z\end{pmatrix}$$

en coordonnées cylindriques. Pour ce qui est des coordonnées sphériques il n'y a pas de représentation en vecteur colonne de $\vec{\nabla}$ (on peut en faire une expression matricielle néanmoins).

Dans la pratique c'est en dernier recours qu'on utilisera l'expression des champs et des opérateurs différentiels dans un système de coordonnées particulier. On s'appuiera plutôt sur les identités que vérifient ces opérateurs différentiels et qui sont compilées en 2..

Exemple 8.10. Soit $\vec{p}$ un vecteur constant et $\vec{r}$ le rayon vecteur usuel. Calculons

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right).$$

Alors, en employant les identités remarquables, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3}\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)\\ &= \frac{1}{r^3}\ \vec{p} + (\vec{p}\cdot\vec{r})\left(\frac{-3}{r^4}\overrightarrow{\text{grad}}(r)\right)\\ &= \frac{\vec{p}}{r^3} - 3(\vec{p}\cdot\vec{r})\ \frac{\vec{r}}{r^5}.\end{aligned}$$

Calculons à présent :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{p}\wedge\vec{r}}{r^3}\right).$$

Alors, en employant les identités remarquables, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{p}\wedge\vec{r}}{r^3}\right) &= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)\wedge(\vec{p}\wedge\vec{r}) + \frac{1}{r^3}\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{p}\wedge\vec{r})\\ &= \frac{-3}{r^5}\ \vec{r}\wedge(\vec{p}\wedge\vec{r}) + \frac{1}{r^3}\ 2\vec{p}\\ &= \frac{2\vec{p}}{r^3} - \frac{3}{r^5}\ \Big(\vec{p}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})\Big)\\ &= 3(\vec{p}\cdot\vec{r})\ \frac{\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3},\end{aligned}$$

en employant la formule du double produit vectoriel.

En considérant les deux calculs que l'on a mené on vient d'établir :

$$4\pi\varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{p}\wedge\vec{r}}{r^3}\right) = 3(\vec{p}\cdot\vec{r})\ \frac{\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3},$$

soit trois représentations du champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ engendré par un dipôle $\vec{p}$ placé en l'origine O du système de coordonnées.

c. Les opérateurs du second ordre

Au moyen des opérateurs différentiels gradient, divergence et rotationnel on a des opérations entre des scalaires et des vecteurs. On peut envisager de composer ces opérateurs (comme on compose des matrices en les multipliant entre elles). Le résultat dépendant de la nature du champ initial (scalaire ou vecteur).

D'un champ scalaire. Considérons un champ scalaire ϕ, à partir de celui-ci on peut obtenir un champ vectoriel grâce au gradient : $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$. A ce nouveau champ on peut appliquer soit la divergence pour obtenir un champ scalaire, soit le rotationnel pour obtenir un champ vectoriel, soit deux chemins :

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)) = \triangle\phi \\
\phi \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{grad}}"] & \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi) \arrow[ur, "\mathrm{div}"] \arrow[dr, "\overrightarrow{\mathrm{rot}}"'] & \\
 & & \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)) = \vec{0}
\end{tikzcd}
$$

Dans le premier cas, la divergence du gradient, on définit un nouvel opérateur, différentiel du second ordre.

Définition 8.10. *On définit l'opérateur* ***laplacien scalaire****, noté $\triangle$, par :*

$$\boxed{\triangle\phi = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)).}$$

Étant donné les expressions précédentes des opérateurs gradient et divergence dans les différents systèmes de coordonnées c'est un exercice de substitution de ces expressions pour obtenir celle du laplacien :

$$
\begin{aligned}
\triangle\phi = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)) &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, && \text{(cartésien)} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} && \text{(cylindriques)} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} && \text{(sphériques)}
\end{aligned}
$$

Cet opérateur est extrêmement important en physique comme l'illustrent les exemples présentés en fin de chapitre.

Le deuxième cas, le rotationnel du gradient, constitue une identité fondamentale du calcul vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)) = \vec{0},}$$

ce qu'on vérifie explicitement, par exemple, en coordonnées cartésiennes au moyen des expression précédentes et sous réserve que ϕ soit suffisamment régulière.

D'un champ vectoriel. Considérons un champ vectoriel $\vec{v}$, à partir de celui-ci on peut obtenir, soit un scalaire en lui appliquant la divergence, soit un champ de vecteur en lui appliquant le rotationnel. Dans le premier cas on ne peut appliquer, comme second opérateur, que le gradient ce qui donne pour résultat un vecteur. Dans le deuxième on peut appliquer, comme second opérateur, soit la divergence pour obtenir un scalaire, soit à nouveau le rotationnel pour obtenir un vecteur. Schématiquement on a :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{div}(\vec{v}) \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{grad}}"] & \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{v})) \\
\vec{v} \arrow[ur, "\mathrm{div}"] \arrow[dr, "\overrightarrow{\mathrm{rot}}"'] & & \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})) = 0 \\
 & \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \arrow[ur, "\mathrm{div}"] \arrow[dr, "\overrightarrow{\mathrm{rot}}"'] & \\
 & & \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}))
\end{tikzcd}$$

Dans ces compositions s'appliquant à un champ de vecteur $\vec{v}$ on obtient la seconde identité fondamentale du calcul vectoriel :

$$\boxed{\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})) = 0,}$$

ce qu'on vérifie explicitement, par exemple, en coordonnées cartésiennes au moyen des expression précédentes et sous réserve que $\vec{v}$ soit suffisamment régulier. Les deux autres chemins offrent une méthode de calcul d'un nouvel opérateur, important, différentiel du second ordre.

Définition 8.11. *On définit l'opérateur* ***laplacien vectoriel****, noté* Δ*, par :*

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})).}$$

6. Les opérateurs différentiels en physique

Il est naturel que les champs, avec des flux et des courants, satisfassent à des équations aux dérivées partielles (en temps et espace). Les opérateurs différentiels ($\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, div, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et Δ) sont des dérivées partielles spatiales "organisées" qui ont un sens (e.g. le gradient indique la direction de plus forte croissance). Aussi, comme les lois de la physique dérivent de grands principes, il est nécessaire que ces équations s'écrivent en termes de ces opérateurs (uniquement).

L'exemple le plus simple à disposition est celui des ***équations de Navier-Stokes*** qui décrivent la dynamique d'un fluide. Les grands principes qui permettent d'obtenir celles-ci sont : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement (l'expression locale dans un fluide de $m\vec{a} = \vec{F}$) que l'on note respectivement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0, & \text{(masse)} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\right)(\rho\vec{v}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) + \mu\Delta\vec{v} + \vec{f}, & \text{(quantité de mouvement)} \end{cases}$$

avec ρ la densité volumique du fluide, $\vec{v}$ son champ des vitesses, et où dans le membre de droite de la seconde équation apparaissent les forces avec une force de pression, une force due à la viscosité du fluide sur lui-même et (éventuellement) une force locale $\vec{f}$ (e.g. une force de pesanteur $\vec{f} = \rho\vec{g}$). Le cas échéant on peut rajouter une troisième équation aux dérivées partielles exprimant la conservation de l'énergie du système.

Un deuxième exemple est celui de l'électromagnétisme qui est décrit par les ***équations de Maxwell*** :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0,$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\,\vec{j},$$

avec $\vec{E}(t,\vec{r})$ et $\vec{B}(t,\vec{r})$ les champs électrique et magnétique, respectivement, ρ la densité (volumique) de charge électrique et $\vec{j}$ la densité de courant (électrique). Les constantes numériques ε_0 et μ_0 sont, respectivement, la permittivité (diélectrique) du vide et la perméabilité (magnétique) du vide.

De même on notera l'importance de l'opérateur laplacien au travers des "grandes équations de la physique" tels que :

— l'***équation de Laplace*** :
$$\triangle\, T = 0$$
qui décrit, ici pour l'exemple, la distribution de la température T à l'équilibre dans un domaine de l'espace (muni de ses conditions aux bords).

— l'***équation de Poisson*** :
$$\triangle\, V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
qui décrit, ici pour l'exemple, le potentiel électrostatique V en fonction de la distribution de charge (électrique) ρ, ε_0 est une constante (la *permittivité du vide*). Il s'agit d'une équation de Laplace avec second membre.

— l'***équation de la chaleur*** :
$$\frac{\partial T}{\partial t} - D \triangle T = 0$$
qui décrit, ici pour l'exemple, la diffusion de la température T dans un milieu de coefficient de diffusion thermique D.

— l'***équation des ondes*** :
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \triangle \phi = 0,$$
qui décrit, ici pour l'exemple, la propagation d'une perturbation ϕ à la vitesse v (e.g. de la pression, i.e. une onde acoustique) .

Dans ces exemples, il convient de comprendre que toutes ces EDP sont ubiquitaires et s'appliquent à différents cas (l'équation de Schrödinger est une équation de la chaleur, le potentiel gravitationnel vérifie l'équation de Poisson, les déplacements dans un réseau d'oscillateurs vérifient l'équation d'onde, etc.).

Notons que c'est dans un chapitre ultérieur ("problèmes aux limites") que la question de la résolution de telles EDP sera abordée.