

$$\text{sqw}(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}, \quad \text{sqw}(t+1) = \text{sqw}(t).$$

En notant  $\text{sqw}$  les "ondes carrées", c'est-à-dire les créneaux unités :

**Techniques  
mathématiques  
pour la physique**

Julien Quéva

Licence SPI

## 3. Transformées de Laplace usuelles

$F(p)$	$f(t)$	Remarques
$e^{-pa}$	$\delta(t-a)$	$a \geq 0$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$	$p+a > 0$
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$e^{-at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$p+a > 0, n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{(p+a)^\alpha}$	$e^{-at} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$p+a > 0, \alpha > -1$
$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$p+a > 0$
$\frac{1}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \frac{\sin(bt)}{b}$	$p+a > 0, b > 0$
$\frac{p}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos(bt) - \frac{a}{b} e^{-at} \sin(bt)$	$p+a > 0, b > 0$
$e^{\frac{(p+a)^2}{4b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p+a}{2\sqrt{b}}\right)$	$e^{-at-bt^2}$	$b > 0$
$\frac{e^{\frac{(p+a)^2}{4b}}}{p+a} \operatorname{erfc}\left(\frac{p+a}{2\sqrt{b}}\right)$	$e^{-at} \operatorname{erf}(\sqrt{b} t)$	$b > 0$
$\frac{1}{(p+a)\sqrt{p+a+1}}$	$e^{-at} \operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$p+a+1 > 0$
$\frac{1}{p+a} e^{-2b\sqrt{p+a}}$	$e^{-at} \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)$	$p+a > 0$
$\frac{1}{(p+a)^{\frac{3}{2}}} e^{-2b\sqrt{p+a}}$	$2e^{-at} \left[ \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{b^2}{t}\right) - b \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right) \right]$	
$\frac{e^{-b\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+c)}$	$e^{bc+ct^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{4t}} + c\sqrt{t}\right)$	
$\arctan[b(p+a)]$	$\frac{\pi}{2} \delta(t) - e^{-at} \frac{\sin\left(\frac{t}{b}\right)}{t}$	$p+a > 0$
$\frac{1}{p} \operatorname{th}(ap)$	$\operatorname{sqw}\left(\frac{t}{4a}\right)$	$p > 0$
$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	$J_0(t)$	
$\frac{1}{\sqrt{1+p^2} (p+\sqrt{1+p^2})^n}$	$J_n(t)$	
$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} (\sqrt{1+p^2}-p)^n$		
$\frac{1}{(p+\sqrt{1+p^2})^n}$	${}_n J_n(t)$	

- Fonction T-périodique :  $\Phi(d) \sqsubset \frac{1 - e^{-\beta T}}{(d)}$ , où  $\Phi(d) = \int_T^0 f(t)e^{-\beta t} dt$ .
- Théorème de la valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow \infty} pF(d) = \lim_{d \rightarrow 0} pF(d)$
- Théorème de la valeur initiale :  $\lim_{t \rightarrow 0} pF(d) = \lim_{d \rightarrow \infty} pF(d)$
- T.L. et dérivées :  $f'(t) \sqsubset dF(d) - f(0_-)$ ,  $f''(t) \sqsubset d^2F(d) - (d)f'(0_-)$ ,  $f^{(n)}(t) \sqsubset d^n F(d) - (d)f^{(n-1)}(0_-)$ , ...

— T.L. d'une fonction définie par une intégrale :  $\int_t^0 f(u) du \sqsubset \frac{d}{F(d)}$ , si  $f(t) \sqsubset F(d)$ .

— Identités additionnelles :

$$tf(t) \sqsubset -F'(d) \quad \int_0^d \frac{f(t)}{F(u)} du \sqsubset \frac{t}{F(d)}$$

— T.L. et convolution :

$$f * g(t) \sqsubset F(d)G(d)$$

avec

$$f * g(t) = H(t) \int_t^0 f(t-\tau)g(\tau) d\tau$$

pour  $f$  et  $g$  causales.

## Table des matières

- 1 Alphanbet grec et latinismes courants
- 2 Périmètres, aires et volumes usuels
- 3 Formulaire de trigonométrie
- 4 Dérivées et intégrales
- 5 Fonctions usuelles
- 6 Formulaire de calcul vectoriel et systèmes de coordonnées
- 7 Fonctions spéciales
- 8 Transformées de Laplace

# 8 | Transformées de Laplace

## 1. Définitions et rappels

La transformée de Laplace  $F$  de  $f$  est définie par

$$F(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad f(t < 0) = 0,$$

et est notée  $f(t) \sqsupset F(p)$ , ou  $F = \mathcal{L}(f)$ . On rappelle que  $H(t)$  est la fonction de Heaviside avec :

$$H(t) = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Les fonctions que l'on considère sont *causales*, c'est-à-dire que  $f(t < 0) = 0$ . Si jamais  $f(t < 0) \neq 0$  on considèrera la fonction  $H(t)f(t)$  en lieu et place de  $f$ .

## 2. Identités et propriétés vérifiées par les transformées de Laplace

— Linéarité :

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \sqsupset c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

— Changement d'échelle ( $a > 0$ ) :

$$f(at) \sqsupset \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

— Formule du retard ( $a > 0$ ) :

$$H(t-a)f(t-a) \sqsupset e^{-pa} F(p)$$

— Théorème de l'amortissement :

$$e^{-at} f(t) \sqsupset F(p+a)$$

# I | Alphabets grec et latinismes courants

Que ce soit en physique ou en mathématique on fait un usage quotidien de l'alphabet grec. En effet, un angle sera souvent noté  $\theta$  ou  $\phi$ , la fonction gamma d'Euler est notée  $\Gamma$ , la fonction zêta de Riemann est notée  $\zeta$ , etc. Aussi faut-il connaître cet alphabet que l'on rappelle en Tab. 1.1. De même c'est un travers courant, auquel ce manuscrit n'échappe pas, que d'employer des abréviations latines. Le tableau Tab. 1.2 en donne quelques unes ainsi que des exemples d'utilisation de celles-ci.

Enfin, on rappelle que les termes latins suivants sont communément admis en français : *agenda, alinea, a priori, bravo, bis, decorum, fac simile, forum, gratis, idem, impronptu, incognito, interim, in situ, ipso facto, libido, maximum, medium, memento, minimum, mordicus, nec plus ultra, provata, quiproquo (quid pro quo), receptisse, recto, stricto sensu, summum, ultimum, verso, veto, vice versa, visa.*

1

Lettre(s) Nom	Lettre(s) Nom	Lettre(s) Nom
$\alpha$ alpha	$\iota$ iota	$\rho, \varrho$ rho
$\beta$ beta	$\kappa, \chi$ kappa	$\Sigma, \sigma, \varsigma$ sigma
$\Gamma, \gamma$ gamma	$\Lambda, \lambda$ lambda	$\tau$ tau
$\Delta, \delta$ delta	$\mu$ mu	$\Upsilon, \upsilon$ upsilon
$\epsilon, \varepsilon$ epsilon	$\nu$ nu	$\Phi, \phi, \varphi$ phi
$\zeta$ zeta	$\xi, \zeta$ xi	$\chi$ chi
$\eta$ eta	$\omicron, \circ$ omicron	$\Psi, \psi$ psi
$\theta, \vartheta, \var�$ theta	$\Pi, \pi, \varpi$ pi	$\Omega, \omega$ omega

Tab. 1.1 Alphabet grec

TAB. 1.2 Abréviations latines courantes

	Latin	Traduction	Exemple
c. ca.	<i>circa</i>	environ (temps)	... axiomatisée par von Neumann (ca. 1930).
cf.	<i>confer</i>	voir, comparer	cf. les principes (Dirac, 1930).
et al.	<i>et alii</i>	et autres	K.A. Olive et al., 2014 (une centaine d'auteurs)
etc.	<i>et cetera</i>	et les autres	... métaux de transition : Sc, Ti, V, Cr, etc.
e.g.	<i>exempli gratia</i>	par exemple	... observés, e.g. avance du périhélie de Mercure.
i.e.	<i>id est</i>	c'est-à-dire	... variable définie localement (i.e. intensive) ...
N.B.	<i>nota bene</i>	Notez bien que	N.B. Il sera tenu compte ...
P.S.	<i>post scriptum</i>	"écrit après"	P.S. Lisez le post-scriptum.
viz.	<i>videlicet</i>	précisément	... le gradient de $\varphi$ , viz. un champ vectoriel.
v. vs.	<i>versus</i>	contre	Aristotélisme vs. Galiléisme

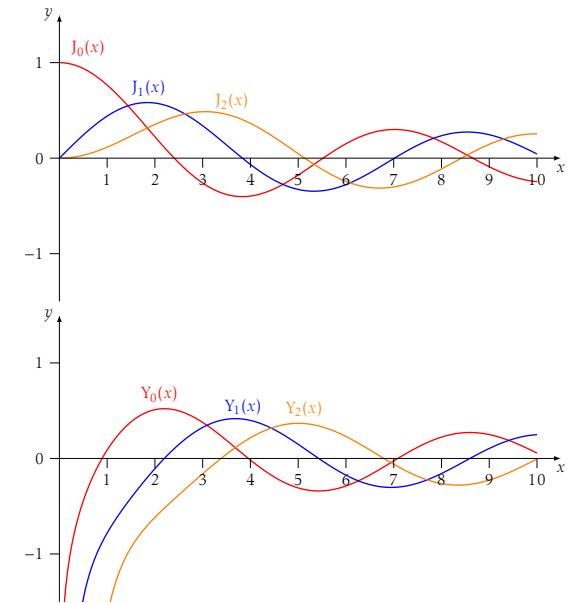



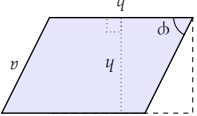
FIG. 7.3 Tracé des premières fonctions de Bessel d'indice entier de première espèce (graphe du haut) et de seconde espèce (graphe de dessous).

$k$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$	$Y_3(x)$	$Y_4(x)$	$Y_5(x)$
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,772	0,894	2,197	3,384	4,527	5,645	6,747
2	5,202	7,016	8,417	9,761	11,065	12,339	3,958	5,430	6,794	8,098	9,362	10,597
3	8,654	10,174	11,620	13,015	14,373	15,700	7,086	8,596	10,023	11,396	12,730	14,034
4	11,792	13,324	14,796	16,224	17,616	18,980	10,222	11,749	13,210	14,623	16,000	17,347
5	14,931	16,471	17,960	19,409	20,827	22,218	13,361	14,897	16,379	17,818	19,224	20,603

Tab. 7.1 Tableau des valeurs arrondies des premiers zéros des premières fonctions de Bessel de première et de seconde espèce

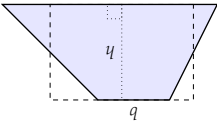
— Formules de récurrence :  
 $\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x)$ ,  
 $2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$ ,  
 $\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^k (x^\nu J_\nu(x)) = x^{-\nu-k} J_{\nu-k}(x)$ ,  
 $\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^k (x^{-\nu} J_\nu(x)) = (-1)^k x^{-\nu-k} J_{\nu+k}(x)$ .  
 En particulier :  
 $J'_0(x) = -J_1(x)$ ,  $Y'_0(x) = -Y_1(x)$ .  
 — Formule d'addition :  
 $J_\nu(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{\nu-k}(y)$   
 — Définition de  $Y_\nu(x)$  :  
 $Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\nu\pi)}{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}, & \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\sin(\nu\pi)}{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}, & \nu = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

— Developpements asymptotiques :  
 $J_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left( \frac{2}{x} \right)^\nu \Gamma(\nu)$ ,  $x \sim 0$ ,  $\Re(\nu) > 0$ ,  
 $Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x$ ,  $x \sim 0$ ,  
 $Y_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left( \frac{2}{x} \right)^\nu \Gamma(\nu)$ ,  $x \sim 0$ ,  
 $J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \gg 1$ ,  
 $Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \gg 1$ ,  
 $J_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{2\nu}{ex}\right)^{\nu}$ ,  $\nu \gg 1$ ,  
 $Y_\nu(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{2\nu}{ex}\right)^{\nu}$ ,  $\nu \gg 1$ .

— Rectangle :  
  
 Périmètre =  $2(a+b)$ ,  
 Aire =  $ab$ .  
 — Parallélogramme :  
  
 Périmètre =  $2(a+b) = 2\left(\frac{a}{\sin\phi} + b\right)$ ,  
 Aire =  $bh = ab \sin\phi$ .

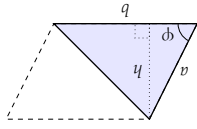
3

— Trapèze :



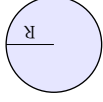
Aire =  $\left(\frac{B+b}{2}\right)h$

— Triangle :



Aire =  $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \sin\phi$

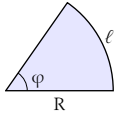
— Cercle, Disque :



Périmètre =  $2\pi R$ ,  
 Aire =  $\pi R^2$ .

## 2 | Périmètres, aires et volumes usuels

— Secteur angulaire :

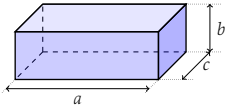


$$l = R\varphi,$$

$$\text{Aire} = \frac{\varphi}{2\pi}\pi R^2 = \frac{\varphi R^2}{2},$$

avec  $\varphi$  en radians.

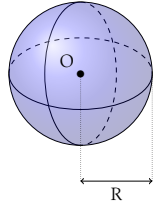
— Parallélépipède rectangle :



$$\text{Aire} = 2(ab + bc + ca),$$

$$\text{Volume} = abc.$$

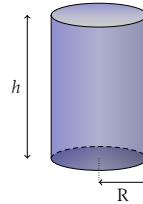
— Sphère :



$$\text{Aire} = 4\pi R^2,$$

$$\text{Volume} = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

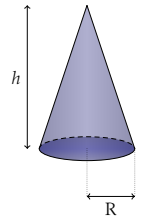
— Cylindre :



$$\text{Aire} = 2\pi R(R + h),$$

$$\text{Volume} = \pi R^2 h$$

— Cône :



$$\text{Aire de la base} = \pi R^2,$$

$$\text{Aire latérale} = \pi R\sqrt{R^2 + h^2},$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

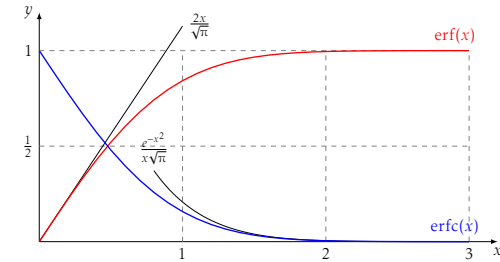


FIG. 7.2 Tracé de la fonction erreur erf (en rouge) et de la fonction d'erreur complémentaire erfc (en bleu). Pour  $x \rightarrow 0$  la fonction erreur s'approche bien par la droite  $y = 2x/\sqrt{\pi}$  alors que pour  $x \rightarrow \infty$  (en pratique  $x > \frac{3}{2}$ ) elle s'approche par  $\text{erfc}(x) \sim 1 - e^{-x^2}/(x\sqrt{\pi})$ .

### 3. Fonctions de Bessel de première et seconde espèce $J_\nu$ et $Y_\nu$

— Équation différentielle de Bessel :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \geq 0.$$

possède pour solution générale :

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \quad \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

avec  $J_\nu$  la fonction de Bessel de première espèce et  $Y_\nu$  celle de seconde espèce. Pour  $\nu = n \in \mathbb{N}$  on a :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

— Représentation en série de  $J_\nu(x)$  :

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

— Représentations intégrales de  $J_n(x)$  :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta,$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta,$$

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

— Fonctions génératrices de  $J_n(x)$  :

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x), \quad e^{ix \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{in\theta},$$

$$1 = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2J_{2n}(x), \quad e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}.$$

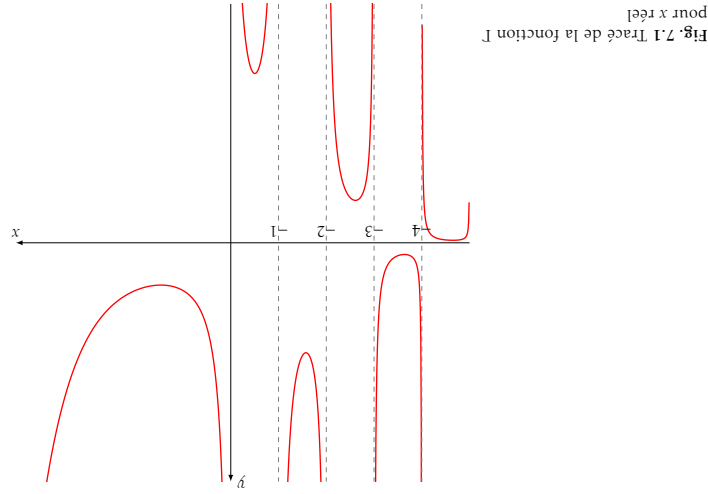


Fig. 7.1 Tracé de la fonction  $\Gamma$  pour  $x$  réel

## 2. Fonction d'erreur erf

<p>— Définitions :</p> $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du,$ $\operatorname{erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^\infty e^{-u^2} du$ <p>— Symétrie :</p> $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ <p>— Propriétés :</p> $\operatorname{erfc}(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(x) = 0,$ $\operatorname{erf}(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1,$	<p>— Dérivées :</p> $\operatorname{erf}'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2},$ $\operatorname{erfc}'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2},$ <p>— Primitives :</p> $\int \operatorname{erf}(x) dx = x \operatorname{erf}(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{1} e^{-x^2},$ $\int \operatorname{erfc}(x) dx = x \operatorname{erfc}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{1} e^{-x^2},$ <p>— Développements asymptotiques :</p> $\operatorname{erf}(x) \sim \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \quad (x \rightarrow 0),$ $\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \frac{x\sqrt{\pi}}{e^{-x^2}} \quad (x \rightarrow \infty)$
---	--

# 3 | Formulaire de trigonométrie

## 1. Définition des fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle

Pour le triangle rectangle  $OAB$  avec  $\widehat{AOB} = \varphi$ , tel qu'en Fig. 3.1, on définit :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OA}{AB} \\ \sin \varphi &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OB}{AB} \\ \tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{OA}{OB} \end{aligned}$$

On peut obtenir ces fonctions trigonométriques et leurs valeurs en considérant diverses projections d'un point  $M$  du cercle unité centré sur l'origine  $O$ , cf. Fig. 3.2. Par exemple les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  de ce point, qui sont les projections orthogonales sur les axes de ce point, sont  $(x, y) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . De ces figures on en déduit aisément les valeurs remarquables que prennent les fonctions trigonométriques pour des angles particuliers, que l'on liste en Tab. 3.1 et qui sont représentées en Fig. 3.3.

## 2. Propriétés et identités vérifiées par les fonctions trigonométriques

### a. Propriétés fondamentales

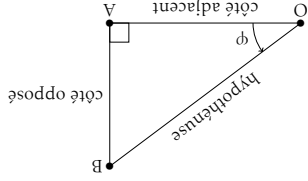


Fig. 3.1 Triangle rectangle  $OAB$ .

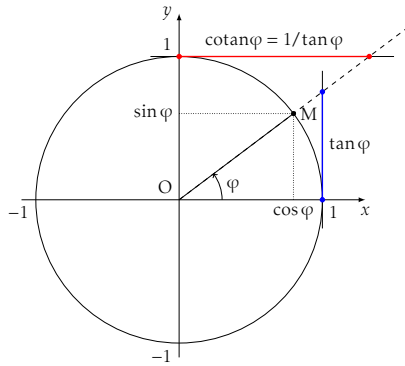


FIG. 3.2 Point M rapporté au cercle trigonométrique. La projection de M sur l'axe  $Ox$  donne le cosinus de l'angle que fait  $OM$  avec  $Ox$ , sa projection sur l'axe  $Oy$  le sinus. De même la projection de M sur la droite perpendiculaire à  $Ox$  et passant par le point de coordonnées  $(1, 0)$  a pour ordonnée  $\tan \varphi$  (en bleu). Enfin, la projection de M sur la droite perpendiculaire à  $Oy$  et passant par le point de coordonnées  $(0, 1)$  a pour abscisse  $\cotan \varphi = 1/\tan \varphi$  (en rouge).

— Parité :

$$\begin{aligned}\cos(-\varphi) &= \cos \varphi, \\ \sin(-\varphi) &= -\sin \varphi, \\ \tan(-\varphi) &= -\tan \varphi.\end{aligned}$$

— Périodicité :

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + 2\pi) &= \cos \varphi, \\ \sin(\varphi + 2\pi) &= \sin \varphi, \\ \tan(\varphi + \pi) &= \tan \varphi.\end{aligned}$$

On a de plus d'autres formules qui se déduisent du triangle rectangle initial dans le cercle trigonométrique par des réflexions par rapport à certains axes, cf. Fig. 3.5.

#### b. Identités utiles

Les fonctions trigonométriques vérifient les identités fondamentales :

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= 1, \\ 1 + \tan^2 \varphi &= \frac{1}{\cos^2 \varphi},\end{aligned}$$

ainsi que tout un jeu d'identités utiles pour les calculs qu'on répertorie ci-après.

## 7 | Fonctions spéciales

### 1. Fonctions eulériennes $\Gamma$ et $B$

#### a. Fonction gamma $\Gamma$

— Définition :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

— Valeurs remarquables :

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

— Relation de récurrence :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

— Argument entier ou demi-entier ( $n \in \mathbb{N}$ ) :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} 2n!}{2^{2n} n!}.$$

— Formule des compléments :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

— Formule de duplication :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

— Formule de Stirling ( $n \rightarrow \infty$ ) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right).$$

#### b. Fonction bêta $B$

— Représentations intégrales :

$$\begin{aligned}B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\rho^{x-1}}{(1+\rho)^{x+y}} d\rho.\end{aligned}$$

— Symétrie :

$$B(x, y) = B(y, x)$$

— Lien avec  $\Gamma$  :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ \text{div}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta v_\phi) \\ \text{rot}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta v_r) \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r v_r) \right] \mathbf{e}_\theta + \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta v_\theta) \right] \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

les opérateurs différentiels ont les expressions suivantes :

- Divers :
  - $\cos\left(\frac{z}{r} - \phi\right) = \sin \phi,$
  - $\sin\left(\frac{z}{r} - \phi\right) = \cos \phi,$
  - $\tan\left(\frac{z}{r} - \phi\right) = \frac{1}{\tan \phi},$
- voir aussi Fig. 3.5.
- Formules d'Euler :
  - $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$
  - $\cos \phi = \Re(e^{i\phi}),$
  - $\sin \phi = \Im(e^{i\phi}),$
- Formule de Moivre :
  - $(\cos \phi + i \sin \phi)^\alpha = \cos(\alpha\phi) + i \sin(\alpha\phi),$
  - pour  $\alpha \in \mathbb{R}.$
- Formules d'addition :
  - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$
  - $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$
  - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$
  - $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$
- Formules de somme :
  - $\frac{1}{\tan a + \tan b} = \frac{1 - \tan a \tan b}{\tan a + \tan b}$
  - $\frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1 + \tan a \tan b}{\tan a - \tan b}$

- Formules de duplication :
  - $\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi,$
  - $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi,$
  - $\tan 2\phi = \frac{2 \tan \phi}{1 - \tan^2 \phi}.$
- Formules de linéarisation :
  - $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi),$
  - $\sin^2 \phi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi).$
- Sommes en produits :
  - $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$
  - $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$
  - $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$
  - $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$
- Produits en sommes :
  - $\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\cos(a+b) + \cos(a-b)},$
  - $\frac{1}{\sin a \sin b} = \frac{1}{\cos(a-b) - \cos(a+b)},$
  - $\frac{1}{\sin a \cos b} = \frac{1}{\cos(a+b) + \cos(a-b)},$
  - $\frac{1}{\cos a \sin b} = \frac{1}{\cos(a-b) - \cos(a+b)}.$

$\phi$	radians (rad)	degrés (°)	cos $\phi$	sin $\phi$	tan $\phi$
0	0	0°	1	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1	$\infty$

Tab. 3.1 Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

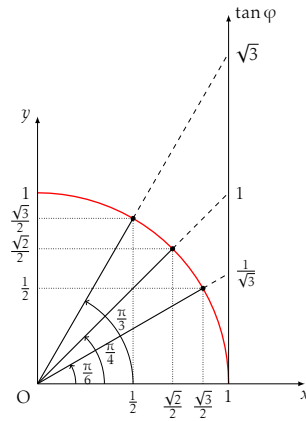


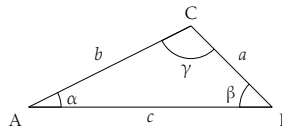
Fig. 3.3 Représentation des différents angles remarquables sur le cercle unité.

— Tangente de l'arc moitié [ $t = \tan(\varphi/2)$ ] :

$$\cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\tan \varphi = \frac{2t}{1-t^2}, \quad d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Dans un triangle ABC tel que ci-dessous :



— *Lois des cosinus et sinus* :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

— *Formules de Mollweide* :

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

### 3. Fonctions trigonométriques inverses

Sur les domaines où les fonctions trigonométriques établissent une bijection on peut définir une fonction inverse. Par exemple on a :

$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \pi],$$

en notant arccos la fonction inverse du cosinus. On définit, de plus, arcsin comme étant la fonction inverse du sinus et arctan comme étant celle de la tangente.

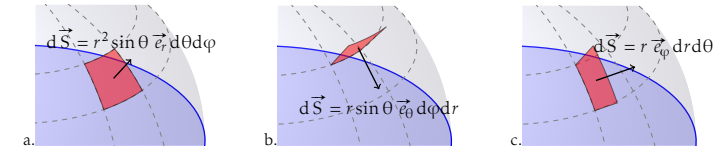


Fig. 6.7 Représentation des surfaces élémentaires dans le système de coordonnées sphériques.

Ainsi les quantités cinématiques du point M sont données par :

$$\vec{r} = \overline{OM} = r \vec{e}_r,$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r$$

$$+ (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta$$

$$+ (2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r \sin \theta \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi.$$

c. *Éléments d'intégration*

L'« élément de déplacement » est donné par :

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + r \vec{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \vec{e}_\varphi d\varphi.$$

Grâce à celui-ci on obtient les déplacements élémentaires le long des lignes de coordonnées :

$$d\vec{r}(r) \Big|_{\theta, \varphi} = \vec{e}_r dr, \quad d\vec{r}(\theta) \Big|_{r, \varphi} = r \vec{e}_\theta d\theta \quad d\vec{r}(\varphi) \Big|_{r, \theta} = r \sin \theta \vec{e}_\varphi d\varphi.$$

Les surfaces élémentaires orientées obtenues en fixant une coordonnées (cf. Fig. 6.7) sont données par :

$$d\vec{S}(\theta, \varphi) \Big|_r = d\vec{r} \Big|_{\varphi, r} \wedge d\vec{r} \Big|_{r, \theta} = r^2 \sin \theta \vec{e}_r d\theta d\varphi,$$

$$d\vec{S}(\varphi, r) \Big|_\theta = d\vec{r} \Big|_{r, \theta} \wedge d\vec{r} \Big|_{\theta, \varphi} = r \sin \theta \vec{e}_\theta d\varphi dr,$$

$$d\vec{S}(r, \theta) \Big|_\varphi = d\vec{r} \Big|_{\theta, \varphi} \wedge d\vec{r} \Big|_{\varphi, r} = r \vec{e}_\varphi dr d\theta.$$

L'élément de volume infinitésimal (cf. Fig. 6.6 b) est donné par :

$$dV(r, \theta, \varphi) = \left( d\vec{r} \Big|_{\varphi, r} \wedge d\vec{r} \Big|_{r, \theta} \right) \cdot d\vec{r} \Big|_{\theta, \varphi} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

d. *Expressions des opérateurs différentiels en coordonnées sphériques*

Pour un champ scalaire  $f$  et un champ de vecteur  $\vec{v}$  donné par :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi,$$

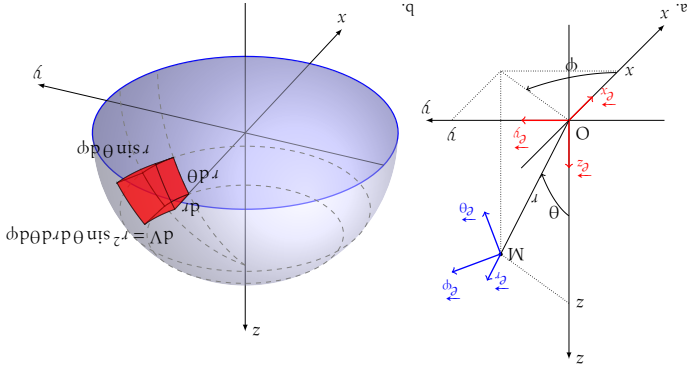


Fig. 6.6 Représentation du système de coordonnées sphériques en a. et représentation de l'élément de volume infinitésimal  $dV$  à la surface d'une sphère en coordonnées sphériques en b.

où  $\theta$  est la colatitude et  $\phi$  la longitude, cf. Fig. 6.6 a. Ce système peut s'inverser diversement avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \tan \phi = \frac{x}{y}, \\ \cos \theta = \frac{z}{r}. \end{array} \right.$$

La base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\phi)$  est une BOND reliée à la base cartésienne par :

$$\begin{aligned} \underline{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \underline{e}_x + \sin \theta \sin \phi \underline{e}_y + \cos \theta \underline{e}_z, \\ \underline{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \underline{e}_x + \cos \theta \sin \phi \underline{e}_y - \sin \theta \underline{e}_z, \\ \underline{e}_\phi &= -\sin \phi \underline{e}_x + \cos \phi \underline{e}_y. \end{aligned}$$

**b. Relations cinématiques**

Lorsque le point  $M$  évolue dans le temps les coordonnées évoluent dans le temps et les vecteurs de la base mobile vérifient les équations différentielles :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}_r &= \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi} \underline{e}_\phi, \\ \dot{\underline{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \underline{e}_r + \cos \theta \dot{\phi} \underline{e}_\phi, \\ \dot{\underline{e}}_\phi &= -\sin \theta \dot{\phi} \underline{e}_r - \cos \theta \dot{\phi} \underline{e}_\theta. \end{aligned}$$

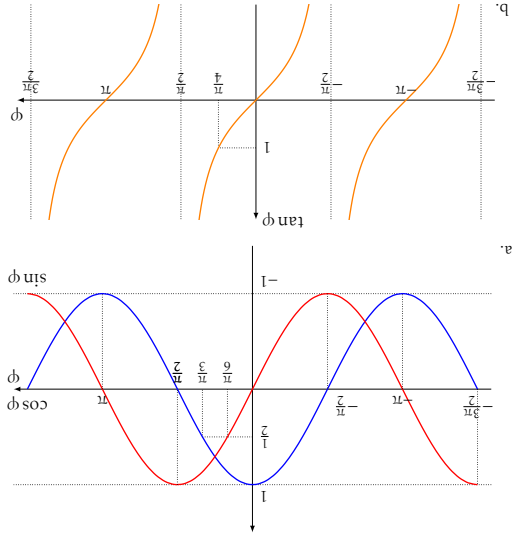


Fig. 3.4 Représentation graphique des fonctions trigonométriques avec en a. la fonction cosinus en bleu et la fonction sinus en rouge et en b. la fonction tangente en orange.

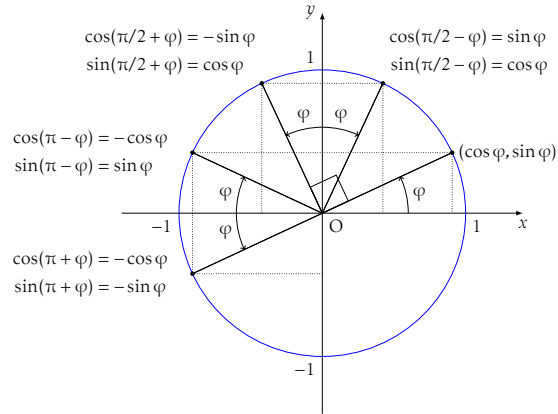


FIG. 3.5 En considérant un point M du cercle trigonométrique, tel que OM fasse un angle  $\varphi$  avec l'axe  $Ox$ , et les réflexions de OM on établit de nouvelles identités entre les fonctions trigonométriques  $\cos$  et  $\sin$ . La réflexion vis-à-vis de l'origine O consiste à considérer le point faisant un angle de  $\varphi + \pi$  par rapport à l'axe  $Ox$ . La réflexion par rapport à  $Oy$  celui d'angle  $\pi - \varphi$ , celle par rapport à la première bissectrice ( $y = x$ ) celui d'angle  $\pi/2 - \varphi$ . Enfin, la composition des deux dernières réflexions donne le point faisant un angle de  $\pi/2 + \varphi$  avec l'axe  $Ox$ .

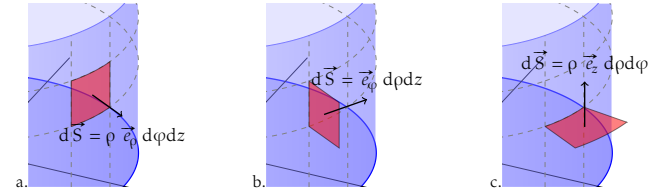


FIG. 6.5 Représentation des surfaces élémentaires dans le système de coordonnées cylindriques.

L'élément de volume infinitésimal (cf. Fig. 6.4 b) est donné par :

$$dV(\rho, \varphi, z) = \left( d\vec{r} \Big|_{z,\rho} \wedge d\vec{r} \Big|_{\rho,\varphi} \right) \cdot d\vec{r} \Big|_{\varphi,z} = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

#### d. Expressions des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Pour un champ scalaire  $f$  et un champ de vecteur  $\vec{v}$  donné par :

$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z,$$

les opérateurs différentiels ont les expressions suivantes :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z,$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\varphi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z,$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\Delta \vec{v} = \left[ \Delta v_\rho - \frac{1}{\rho^2} \left( v_\rho + 2 \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} \right) \right] \vec{e}_\rho + \left[ \Delta v_\varphi - \frac{1}{\rho^2} \left( v_\varphi - 2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} \right) \right] \vec{e}_\varphi + (\Delta v_z) \vec{e}_z.$$

## 5. Système de coordonnées sphériques

### a. Définition

Dans ce cas on pose :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi \leq \varphi < \pi.$$

où, dans le plan  $Oxy$ , les coordonnées sont les coordonnées polaires  $(\rho, \phi)$ . Le système s'inverse

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \phi = \frac{y}{x}, \end{array} \right.$$

où pour déterminer  $\phi$  il est nécessaire de faire attention au secteur du plan dans lequel est  $M$ . En choisissant  $\phi$  dans  $[-\pi, \pi]$  on a la formule plus globale :

$$\phi = 2 \arctan \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Les vecteurs  $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$  forment une BOND mobile liée à la base cartésienne (fixe) par :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z. \end{aligned}$$

**b. Relations cinématiques**

Les vecteurs de la base cylindrique sont mobiles et vérifient les équations différentielles :

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \phi \vec{e}_\phi, \quad \dot{\vec{e}}_\phi = -\phi \vec{e}_\rho, \quad \dot{\vec{e}}_z = 0,$$

ce qui permet d'obtenir les quantités cinématiques d'un point  $M$  de rayon vecteur  $\vec{r}(t) = \underline{OM}(t)$  évoluant dans le temps :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \underline{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \phi \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + (\dot{\rho} \phi + \rho \dot{\phi}) \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

**c. Éléments d'intégration**

L'« élément de déplacement » est donné par :

$$d\vec{r} = \dot{\rho} d\rho + \rho \dot{\phi} d\phi + \dot{z} dz.$$

Grâce à celui-ci on obtient les déplacements élémentaires le long des lignes de coordonnées :

$$d\vec{r}(\rho) \Big|_{z,\phi} = \dot{\rho} d\rho, \quad d\vec{r}(\phi) \Big|_{\rho,z} = \rho \dot{\phi} d\phi, \quad d\vec{r}(z) \Big|_{\rho,\phi} = \dot{z} dz.$$

Les surfaces élémentaires orientées obtenues en fixant une coordonnées (cf. Fig. 6.5) sont données par :

$$\begin{aligned} d\vec{S}(\rho, z) \Big|_{\phi} &= d\vec{r} \Big|_{\rho,\phi} \wedge d\vec{r} \Big|_{z,\phi} = \rho \dot{\phi} d\rho dz, \\ d\vec{S}(z, \rho) \Big|_{\phi} &= d\vec{r} \Big|_{z,\phi} \wedge d\vec{r} \Big|_{\rho,\phi} = \dot{\rho} d\rho dz, \\ d\vec{S}(\rho, \phi) \Big|_{z} &= d\vec{r} \Big|_{\rho,z} \wedge d\vec{r} \Big|_{\phi,z} = \rho \dot{\phi} d\rho d\phi. \end{aligned}$$

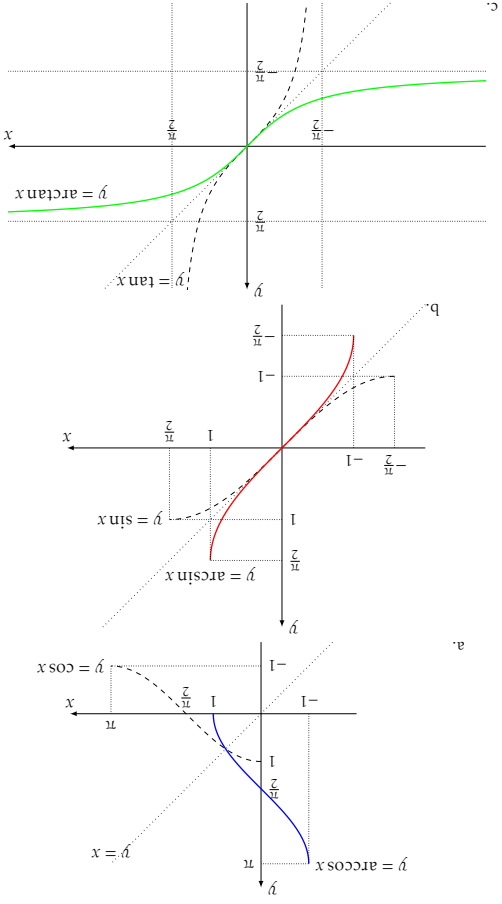


Fig. 3.6 Représentation graphique des fonctions trigonométriques réciproques. a. Tracé de la fonction arcsin en bleu ainsi que du cosinus. b. Tracé de la fonction arccos en rouge ainsi que du sinus. c. Tracé de la fonction arctan en vert ainsi que de la tangente.

On démontre que ces fonctions réciproques vérifient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \arccos x + \arcsin x &= \frac{\pi}{2}, & \arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin x &= \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right), & \arctan x &= \arcsin \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right). \end{aligned}$$

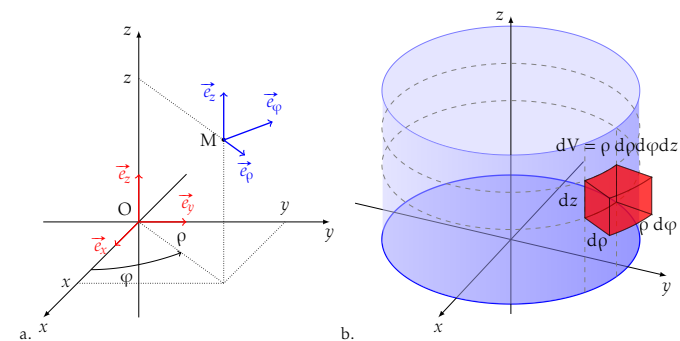


FIG. 6.4 Représentation du système de coordonnées cylindriques en a. et représentation de l'élément de volume infinitésimal  $dV$  à la surface d'un cylindre en coordonnées cylindriques en b.

les opérateurs différentiels ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v}) &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z, \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ \Delta \vec{v} &= (\Delta v_x) \vec{e}_x + (\Delta v_y) \vec{e}_y + (\Delta v_z) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

## 4. Système de coordonnées cylindriques

### a. Définition

Dans ce cas on pose :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad z \in \mathbb{R},$$

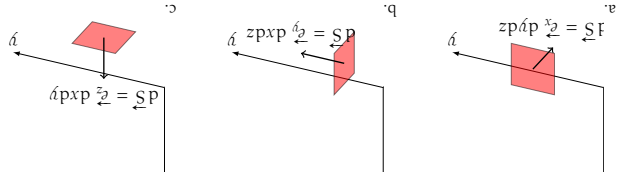


Fig. 6.3 Représentation des surfaces élémentaires dans le système de coordonnées cartésiennes.

c. *Éléments d'intégration*

L'« élément de déplacement » est donné par :

$$d\vec{T} = z_c dx + z_c dy + z_c dz.$$

Grâce à celui-ci on obtient les déplacements élémentaires le long des lignes de coordonnées :

$$d\vec{T}(x) \Big|_{yz} = z_c dx, \quad d\vec{T}(y) \Big|_{xz} = z_c dy, \quad d\vec{T}(z) \Big|_{xy} = z_c dz.$$

Les surfaces élémentaires orientées obtenues en fixant une coordonnée (cf. Fig. 6.3) sont données :

$$\begin{aligned} d\vec{S}(y, z) \Big|_x &= d\vec{T} \Big|_{xz} \wedge d\vec{T} \Big|_{xy} = z_c dy dz, \\ d\vec{S}(z, x) \Big|_y &= d\vec{T} \Big|_{yz} \wedge d\vec{T} \Big|_{xy} = z_c dx dz, \\ d\vec{S}(x, y) \Big|_z &= d\vec{T} \Big|_{yz} \wedge d\vec{T} \Big|_{xz} = z_c dx dy. \end{aligned}$$

L'élément de volume infinitésimal (cf. Fig. 6.2 b) est donné par :

$$dV(x, y, z) = \left( d\vec{T} \Big|_{yz} \wedge d\vec{T} \Big|_{xz} \right) \cdot d\vec{T} \Big|_{xy} = dx dy dz.$$

d. *Expressions des opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes*  
 Pour un champ scalaire  $f$  et un champ de vecteur  $\vec{v}$  donné par :

$$\vec{v} = v_x z_c \vec{e}_x + v_y z_c \vec{e}_y + v_z z_c \vec{e}_z,$$

# 4 | Dérivées et intégrales

## 1. Règles de dérivations

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables, on a alors :

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g', & (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g', \\ (\lambda f)' &= \lambda f', \quad \lambda \in \mathbb{R}, & (f \circ g)' &= (f' \circ g) \cdot g', \end{aligned}$$

La formule, ci-dessus, de dérivée des fonctions composées permet d'obtenir pour  $u$  une fonction dérivable :

$$\begin{aligned} (u^a)' &= au' u^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}, & (\sqrt[n]{u})' &= \frac{2\sqrt[n]{u}}{n}, \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, & \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2}, \\ (\ln u)' &= \frac{u'}{u}, & (e^u)' &= u' e^u. \end{aligned}$$

Les dérivées des fonctions usuelles sont répertoriées en Tab. 4.1. Les développements limités usuels en  $x = 0$  sont eux reproduits en Tab. 4.2.

## 2. Règles d'intégrations

Pour  $f$  une fonction continue sur un intervalle, de primitive  $F$ , on a :

$$\int_b^a f(x) dx = F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b).$$

L'intégrale vérifie les propriétés d'additivité et d'homogénéité qui en font une opération linéaire :

$$\begin{aligned} \int_b^a [f(x) + g(x)] dx &= \int_b^a f(x) dx + \int_b^a g(x) dx, \\ \int_b^a \lambda f(x) dx &= \lambda \int_b^a f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Elle possède de plus des propriétés de composition des bornes d'intégrations :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

ce qui permet de simplifier les intégrales dans le cas où l'intégrande est paire ou impaire :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est impaire,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & \text{si } f \text{ est paire.} \end{cases}$$

En exploitant la formule de la dérivée d'un produit on obtient la formule d'intégration par parties et en utilisant celle de la dérivée des fonctions composées la formule du changement de variable :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(\rho))\varphi'(\rho) d\rho, \quad x = \varphi(\rho).$$

On retrouve les primitives des fonctions usuelles en lisant « à l'envers » la table des dérivées Tab. 4.1.

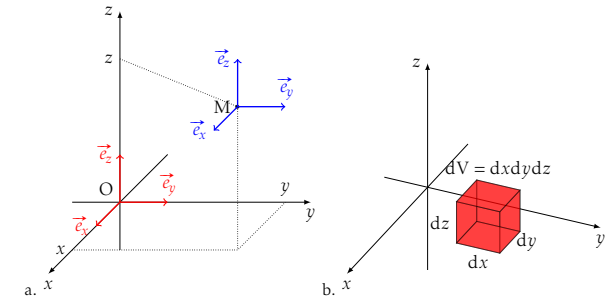


FIG. 6.2 Représentation du système de coordonnées cartésiennes en a. et représentation de l'élément de volume infinitésimal  $dV$  en b.

Les autres formules utiles.–

$$\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) dV = \oint_{S=\partial V} \phi d\vec{S},$$

$$\iiint_V \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) dV = - \oint_{S=\partial V} \vec{F} \wedge d\vec{S},$$

$$\iint_S \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \wedge d\vec{S} = - \oint_{C=\partial S} \phi d\vec{r}.$$

### 3. Système de coordonnées cartésiennes

#### a. Définition

Le repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\})$  est fixe et le point M possède des coordonnées  $(x, y, z)$  telles que :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z,$$

ce qu'on représente en Fig. 6.2.

#### b. Relations cinématique

Les vecteurs  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  forment une BOND fixe dans laquelle :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z.$$

d. Théorèmes intégraux

Rappel des définitions.-

**Définition.** Soient  $\vec{F}$  un champ de vecteurs et  $C$  une courbe orientée, alors la *circulation du champ de vecteurs*  $\vec{F}$  le long de  $C$  est donnée par :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

**Définition.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs traversant une surface  $S$ . Soit  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $S$  tel que  $\vec{n}$  soit un vecteur sortant lorsque  $S$  est une surface fermée et que, lorsque  $S$  est une surface ouverte,  $\vec{n}$  et le bord orienté  $C = \partial S$  de  $S$  vérifient la règle de la main droite. Alors le *flux du champ de vecteurs*  $\vec{F}$  au travers de  $S$  est donné par la formule :

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

en notant  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ .

Les « grands » théorèmes.-

— Théorème de la divergence ou théorème de Green-Ostrogradski, ou formule d'Ostrogradski :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

— Théorème du gradient :

$$\int_C \operatorname{grad}(\phi) \cdot d\vec{r} = \phi_B - \phi_A = \Delta\phi$$

— Théorème du rotationnel ou théorème de Stokes, ou formule de Stokes :

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

— Théorème de Green :

$$\iint_{S=\partial V} [\phi \operatorname{grad}(\psi) - \psi \operatorname{grad}(\phi)] \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\psi \Delta\phi - \phi \Delta\psi - \psi \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi \nabla\psi \cdot \nabla\phi) dV$$

Tab. 4.1 Dérivées et primitives des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$C = \text{constante}$	0	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$x^a, a \neq 0$	$ax^{a-1}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$x \ln x$	$\ln x + 1$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln \ln x$	$\frac{1}{x \ln x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\tan\left(\frac{z}{x}\right)$	$\frac{1}{1 + \cos x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\tan\left(\frac{z}{x} + \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{1 + \sin x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln\left \operatorname{th}\left(\frac{z}{x}\right)\right $	$2 \arctan(e^z)$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln \cos x $	$-\tan x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln \sin x $	$-\cot x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln\left \tan\left(\frac{z}{x}\right) + \frac{\pi}{2}\right $	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln\left \operatorname{th}\left(\frac{z}{x}\right)\right $	$2 \arctan(e^z)$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$2 \arctan(e^z)$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{arcsin} x = \frac{z}{\pi} - \arccos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{argth} x = \frac{z}{2} \ln\left \frac{1-x}{1+x}\right $	$\frac{1}{1-x^2}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\operatorname{th} x}$	$\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{x}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$

Tab. 4.2 Développements limités usuels en 0

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}), \\
\text{sh}(x) &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}), \\
\text{ch}(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + O(x^{2n+2}), \\
\sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}), \\
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + O(x^{2n+2}), \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots + \frac{(-4)^n}{2n!}(1-4^n)B_{2n}x^{2n-1} + O(x^{2n+1})^b, \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}), \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1}), \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \dots - \frac{1}{n}x^n + O(x^{n+1}), \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n + O(x^{n+1})^{\sharp}, \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n + O(x^{n+1}), \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}), \\
\arcsin(x) &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})
\end{aligned}$$

<sup>b</sup>  $B_n$  : nombres de Bernoulli

<sup>‡</sup>  $n!! = n(n-2)\cdots(2 \text{ ou } 1)$  suivant la parité (bifactorielle)

### b. Identités remarquables

Les opérateurs différentiels  $\overrightarrow{\text{grad}}$ ,  $\text{div}$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}$  vérifient différentes identités, indépendamment des champs sur lesquels ils opèrent. Parmi celles-ci les deux suivantes sont cruciales :

$$\begin{aligned}
\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) &= 0, \\
\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

Ensuite il reste un ensemble d'identités facilitant le calcul, à savoir :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= g \overrightarrow{\text{grad}}(f) + f \overrightarrow{\text{grad}}(g), \\
\text{div}(f \vec{v}) &= f \text{div}(\vec{v}) + (\overrightarrow{\text{grad}}(f)) \cdot \vec{v}, \\
\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) - \vec{a} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{b})), \\
\text{div}(f \overrightarrow{\text{grad}}(g) - g \overrightarrow{\text{grad}}(f)) &= f \Delta g - g \Delta f, \\
\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{v}) &= (\overrightarrow{\text{grad}}(f)) \wedge \vec{v} + f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}), \\
\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v},
\end{aligned}$$

où cette dernière identité est souvent utilisée comme permettant de calculer le laplacien vectoriel avec :

$$\Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})).$$

On peut aussi définir la *dérivée directionnelle*, dans le sens de  $\vec{v}$ , avec  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$  qui vérifie :

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\|\vec{v}\|^2) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}, \\
\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \text{div}(\vec{b}) \vec{a} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{a} - \text{div}(\vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b}.
\end{aligned}$$

Lorsque le vecteur  $\vec{v}$  est le champ des vitesses d'un fluide alors cette dérivée directionnelle porte le nom d'*opérateur d'advection* et intervient en particulier dans la *dérivée particulaire* de la description eulérienne de la mécanique des fluides.

### c. Identités utiles

On note  $\vec{r} = \overrightarrow{\text{OM}}$ ,  $r = \|\vec{r}\|$ ,  $\vec{e}_r = \vec{r}/r$  et  $\vec{c}$  est un vecteur constant.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}(r^2) &= 2 \vec{r}, & \text{div}(\vec{r}) &= 3, & \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}) &= \vec{0}, \\
\overrightarrow{\text{grad}}(r) &= \vec{e}_r, & \text{div}(\vec{e}_r) &= \frac{2}{r}, & \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{e}_r) &= \vec{0}, \\
\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\vec{e}_r}{r^2}, & \text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) &= 0, & \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{c} \wedge \vec{r}) &= 2 \vec{c}, \\
\overrightarrow{\text{grad}}(\ln r) &= \frac{\vec{e}_r}{r}, & \text{div}(\vec{c} \wedge \vec{r}) &= 0, & \Delta \frac{1}{r} &= 0, \\
\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{c} \cdot \vec{r}) &= \vec{c}, & \text{div}(f(r) \vec{e}_r) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 f(r)].
\end{aligned}$$

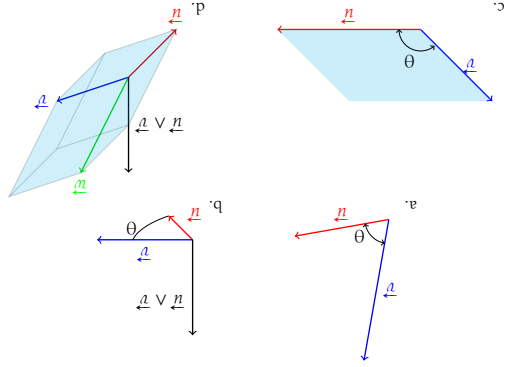


Fig. 6.1 Représentation du produit scalaire de deux vecteurs en a, et du produit vectoriel de ces deux vecteurs en b. Le produit vectoriel permet aussi de retrouver l'aire d'un parallélogramme ainsi que le volume d'un parallélépipède ce qui est illustré en c, et d.

Enfin, pour trois vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  tels que  $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$ ,  $\beta = \angle(\vec{c}, \vec{a})$ ,  $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  on a l'identité remarquable :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \wedge \vec{c} = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \|\vec{c}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma),$$

utile en cristallographie.

## 2. Opérateurs différentiels

### a. Relation à l'opérateur nabla

Les opérateurs  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  et  $\Delta$  sont reliés à l'opérateur nabla  $\nabla$  via :

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \nabla f, & \text{rot}(\vec{v}) &= \nabla \wedge \vec{v}, \\ \text{div}(\vec{a}) &= \nabla \cdot \vec{a}, & \Delta f &= \text{div}(\text{grad}(f)) = \nabla \cdot \nabla f, \end{aligned}$$

en notant  $f$  un champ scalaire et  $\vec{v}$  un champ de vecteurs.

## 5 Fonctions usuelles

### 1. Fonctions exponentielle et logarithme

<p>— Valeurs remarquables :</p> $\ln x = \int \frac{1}{x} du, x > 0.$ <p><math>\ln 1 = 0,</math> <math>\ln e = 1.</math></p> <p>— Propriétés :</p> $\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln x,$ $\ln\left(\frac{b}{x}\right) = \ln x - \ln y, \quad \ln x^a = a \ln x.$ <p>— Limites (<math>a &gt; 0</math>) :</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty,$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$	<p>— Valeurs remarquables :</p> $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$ $\exp(0) = e^0 = 1,$ $\exp(1) = e^1 = e = 2,718\ 281\dots$ <p>— Propriétés :</p> $e^{-x} = \frac{e^x}{1}, \quad e^{x+y} = e^x e^y,$ $\frac{e^{x-y}}{e^x} = e^{-y}, \quad (e^x)^a = e^{ax}.$ <p>— Limites (<math>a &gt; 0</math>) :</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^x = 0.$
---	---

Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre :

$$\exp(\ln x) = e^{\ln x} = x, \quad x > 0,$$

$$\ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 2. Fonction puissance

Pour  $\alpha$  réel on généralise la notion de puissance avec :

$$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

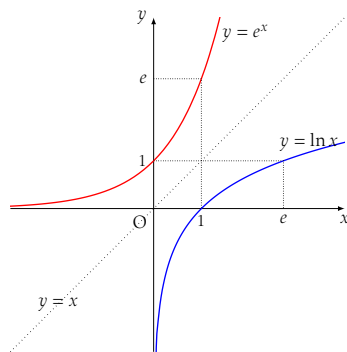


Fig. 5.1 Tracé de la fonction exponentielle  $\exp(x) = e^x$  en rouge et du logarithme népérien, sa fonction réciproque, en bleu.

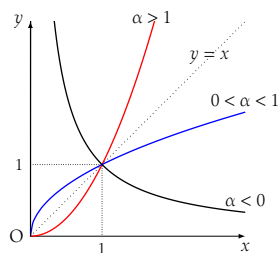


Fig. 5.2 Tracé de la fonction puissance pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha < 0$  on a une courbe décroissante qui s'annule à l'infini (en noir). Pour  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ , la courbe passe sous la première bissectrice pour  $x > 1$  (en bleu), alors que pour  $\alpha > 1$  elle dépasse cette bissectrice (en rouge).

— Propriétés :

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta},$$

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha, \quad \frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha.$$

— Cas particuliers :

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x,$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

### 3. Fonctions hyperboliques

#### a. Définition et propriétés fondamentales

A partir de l'exponentielle on définit les fonctions cosinus hyperbolique (ch), sinus hyperbolique (sh) et tangente hyperbolique (th) :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

## 6 | Formulaire de calcul vectoriel et systèmes de coordonnées

### 1. Identités du calcul vectoriel

#### a. Rappels sur les produits scalaire et vectoriel

Le produit scalaire entre deux vecteurs permet de définir le cosinus de l'angle que font ces vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

cf. Fig. 6.1. Le produit vectoriel, quant à lui, permet d'obtenir un troisième vecteur orthogonal aux deux vecteurs qui le forme de telle sorte que la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$  soit directe avec :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \vec{e}_{u \wedge v},$$

en notant  $\vec{e}_{u \wedge v}$  le vecteur unitaire ayant même direction et même sens que  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

Le produit vectoriel permet de retrouver l'aire du parallélogramme dont les deux côtés sont engendrés par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , alors que le produit mixte donne le volume du parallélépipède engendré par  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  avec :

$$\text{Aire Parallélogramme} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|,$$

$$\text{Volume Parallélépipède} = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|,$$

ce qui est illustré en Fig. 6.1 c. et d.

#### b. Identités remarquables

Les produits scalaire, vectoriel et mixte vérifient les identités suivantes quels que soient les vecteurs auxquels ils s'appliquent.

$$\text{produit mixte : } \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}),$$

$$\text{double produit vectoriel : } \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

$$\text{formule de Lagrange : } (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

On a les deux identités suivantes :

$$\text{Identité de Jacobi : } \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0},$$

$$\text{Identité de Lagrange : } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

qui ont une parité définie :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x, & \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x, & \operatorname{th}(-x) &= -\operatorname{th} x \end{aligned}$$

et vérifient les identités fondamentales :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \\ 1 - \operatorname{th}^2 x &= \frac{\operatorname{ch}^2 x}{1}. \end{aligned}$$

Fig. 5.3  
Ces fonctions hyperboliques, comme leurs comparées trigonométriques, satisfont à un ensemble d'identités qu'on répertorie ci-après. Les graphes des fonctions  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$  et  $\operatorname{th}$  sont représentés en

<p>— Formules d'addition :</p> $\begin{aligned} \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{th}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \end{aligned}$ <p>— Formules de duplication :</p> $\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ &= 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x, \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{th} 2x &= \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}. \end{aligned}$ <p>— Formules de linéarisation :</p> $\begin{aligned} 2 \operatorname{ch}^2 x &= \operatorname{ch}(2x) + 1, \\ 2 \operatorname{sh}^2 x &= \operatorname{ch}(2x) - 1. \end{aligned}$	<p>— Sommes en produits :</p> $\begin{aligned} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{ch} \left( \frac{x+y}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{x-y}{2} \right), \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{sh} \left( \frac{x-y}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{x+y}{2} \right), \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{sh} \left( \frac{x+y}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{x-y}{2} \right), \\ \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{ch} \left( \frac{x-y}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{x+y}{2} \right). \end{aligned}$ <p>— Produits en sommes :</p> $\begin{aligned} 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y), \\ 2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \operatorname{ch}(x-y) - \operatorname{ch}(x+y), \\ 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y). \end{aligned}$ <p>— Fonction de l'angle moitié <math>t = \operatorname{th}(x/2)</math> :</p> $\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2}, & \operatorname{sh} x &= \frac{1-t^2}{2t}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & dx &= \frac{1+t^2}{2dt}. \end{aligned}$
---	---

*b. Fonctions hyperboliques inverses*

Sur les domaines où les fonctions hyperboliques établissent une bijection on peut définir une fonction inverse. Par exemple on a :

$$\operatorname{argch}(\operatorname{ch}(x)) = x, \quad \forall x \geq 0,$$

en notant  $\operatorname{argch}$  la fonction inverse du cosinus hyperbolique  $\operatorname{ch}$ . On définit, de plus,  $\operatorname{argsh}$  comme étant la fonction inverse du sinus hyperbolique et  $\operatorname{argth}$  comme étant celle de la tangente  $\operatorname{th}$ . Les graphes des fonctions  $\operatorname{argch}$ ,  $\operatorname{argsh}$  et  $\operatorname{argth}$  sont représentés en Fig. 5.4.

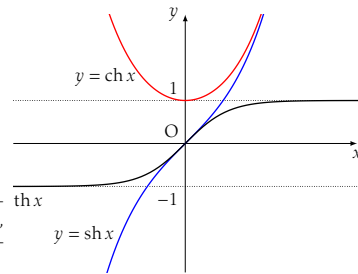


Fig. 5.3 Représentation des fonctions hyperboliques. En rouge le cosinus hyperbolique  $\text{ch } x$ , en bleu le sinus hyperbolique  $\text{sh } x$  et finalement en noir la tangente hyperbolique  $\text{th } x$ .

Ces fonctions hyperboliques réciproques ont une représentation logarithmique :

$$\begin{aligned}\arg \text{ch } x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \arg \text{sh } x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\ \arg \text{th } x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).\end{aligned}$$

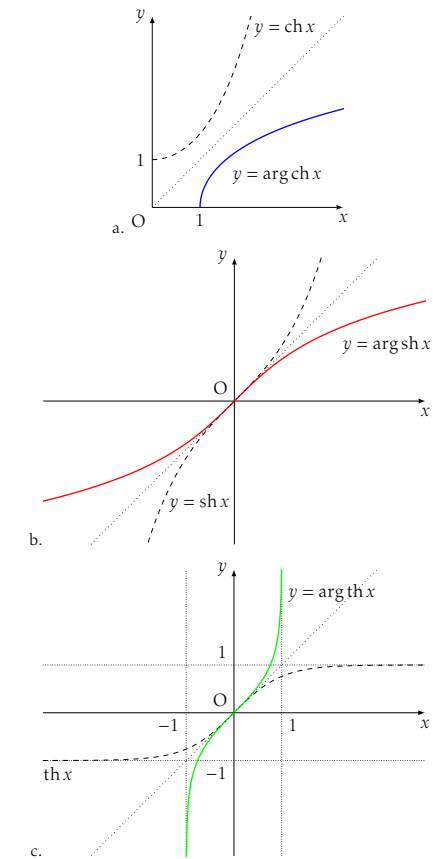


Fig. 5.4 Représentation graphique des fonctions hyperboliques réciproques. a. Tracé de la fonction  $\arg \text{ch}$  en bleu ainsi que du cosinus hyperbolique. b. Tracé de la fonction  $\arg \text{sh}$  en rouge ainsi que du sinus hyperbolique. c. Tracé de la fonction  $\arg \text{th}$  en vert ainsi que de la tangente hyperbolique.